10.2 Singularni polaritet i singularne konike

U ovom će se odjeljku proširiti razmatranja iz prethodnog odjeljka s obzirom na singularne konike i njima pripadne singularne polaritete.
Takve konike i polaritete predstavljamo pomoću singularne simetrične matrice $\mathbf{A}$ trećeg reda (tj. uzimamo da je $|\mathbf{A}| = 0$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$).

Dakle, neka je dan polaritet

$$\mathrm{U} = \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}, \tag{61}$$

i pripadajuća singularna konika K^2.

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0, \tag{62}$$

gdje je $|\mathbf{A}| = 0$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

Uzimajući u obzir singularni polaritet (61), možemo govoriti o preslikavanju skupa točaka proširene realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$ na skup pravaca te ravnine, ali ne možemo općenito govoriti o preslikavanju skupa pravaca na skup točaka promatrane ravnine, jer za singularnu matricu $\mathbf{A}$ ne postoji njena inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$.

Primijetimo da za singularnu matricu $\mathbf{A}$ vrijedi da je $|\mathbf{A}| = 0$, odnosno rang te matrice $\mathbf{A}$ je manji od tri. Dakle, rang singularne matrice $\mathbf{A}$ može biti dva ili jedan, stoga ćemo u nastavku razlikovati dva slučaja:

1) rang matrice $\mathbf{A}$ je jednak dva
2) rang matrice $\mathbf{A}$ je jednak jedan.

1) Pretpostavimo da je rang matrice $\mathbf{A}$ jednak dva.

Tada sustav homogenih jednadžbi

$$\mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0 \tag{63}$$

ima jedno rješenje, koje ćemo označiti sa X_1.
Očito je da jednostupčana matrica X_1 zadovoljava jednadžbu konike K^2 danu sa (62), stoga je točka $\mathrm{X}_1\left(x_{0_1}, x_{1_1}, x_{2_1}\right)$ (kojoj je X_1 koordinatna matrica) ujedno i točka (singularne) konike K^2.

S druge strane imamo da je X_1 rješenje sustava (63), stoga za točku $\mathrm{X}_1\left(x_{0_1}, x_{1_1}, x_{2_1}\right)$ ne postoji polara u polaritetu (61).

Komentar:

Uočimo da uvrštavanjem $\mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1 = 0$ u polaritet (61) proizlazi da je jednostupčana matrica U nul-matrica, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da svaka matrica oblika $\mathrm{U} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ (čiji su elementi kompleksni brojevi koji nisu istodobno svi jednaki nuli) predstavlja kompleksni (imaginarni) pravac projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$.

Točka konike K^2 za koju ne postoji polara zove se ***dvostruka točka konike***.

Dakle, u gore navedenom imamo da je X_1 dvostruka točka singularne konike K^2.

- Podsjetimo se teorema 10.1.1, koji nam govori da je (nesingularna) konika K^2 skup svih točaka projektivne ravnine takvih da su incidentne sa svojom polarom u danom polaritetu.

  S druge strane, u slučaju singularne konike K^2 dobivamo dvostruku točku X_1 na konici K^2 za koju ne postoji polara, stoga zaključujemo da na konici K^2 postoje dvostruke točke ako i samo ako je $\mathbf{A}$ singularna matrica, tj. $|\mathbf{A}| = 0$.

Time možemo izreći sljedeće teoreme.

Teorem 10.2.1

Nesingularne konike nemaju dvostrukih točaka.

Teorem 10.2.2

Polara dvostruke točke singularne konike nije određena.

Teorem 10.2.3

Ako je rang matrice $\mathbf{A}$ singularne konike K^2 jednak dva, onda polara svake točke ravnine (osim dvostruke točke) prolazi jedinom dvostrukom točkom te konike.

Dokaz:

Uzimajući u obzir identitet (51) imamo da je jednadžba polare neke točke Y projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$ dana sa:

$$\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0 . \tag{64}$$

Sada se lako vidi da koordinatna matrica X_1 dvostruke točke $\mathrm{X}_1\left(x_{0_1}, x_{1_1}, x_{2_1}\right)$ zadovoljava jednadžbu (64), jer je $\mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1 = 0$, stoga imamo da vrijedi $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1 = 0$, što se interpretira da dvostruka točka X_1 leži na polari bilo koje točke ravnine. Time je teorem dokazan.

Teorem 10.2.4

Dvostruka točka singularne konike K^2, čija je matrica $\mathbf{A}$ ranga dva, konjugirana je svakoj točki ravnine.

Koristeći definiciju 10.1.4 (definicija konjugiranih točaka s obzirom na neku koniku K^2) imamo da teorem 10.2 4 direktno proizlazi iz teorema 10.2.3.

Teorem 10.2.5

Polara $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0$ neke točke Y s obzirom na neku singularnu koniku K^2, prikazanu matricom $\mathbf{A}$ ranga dva, ujedno je polara svake točke spojnice YX_1, gdje je X_1 dvostruka točka promatrane konike K^2.

Dokaz:

Uzimajući u obzir identitet (51) imamo da je jednadžba polare neke točke $\mathrm{Z} = \lambda_0 \cdot \mathrm{Y} + \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_1$ na spojnici YX_1 dana sa: $\mathrm{Z}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0$, odnosno

$$\left(\lambda_0 \cdot \mathrm{Y} + \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_1\right)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0$$

ili

$$\lambda_0 \cdot \mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} + \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0. \tag{65}$$

Koristeći svojstvo da za dvostruku točku X_1 vrijedi $\left(\mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = 0$ dobivamo da iz (65) proizlazi: $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0$ što je prikaz polare točke Y s obzirom na neku singularnu koniku K^2.
Time je teorem dokazan.

Teorem 10.2.6

Bilo koji pravac *p* proširene realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$ koji ne prolazi dvostrukom točkom singularne konike K^2 dane singularnom matricom $\mathbf{A}$ ranga dva siječe tu koniku u dvije različite realne ili konjugirano kompleksne točke.

Teorem se dokazuje analogno kao i teorem 10.1.7.

Teorem 10.2.7

Ako točka Y, različita od dvostruke točke X_1, leži na singularnoj konici K^2 (kojoj je pripadna matrica $\mathbf{A}$ ranga dva), onda svaka točka spojnice YX_1 također pripada konici K^2.

Dokaz:

Ako točka Y, različita od dvostruke točke X_1, leži na singularnoj konici K^2 (kojoj je pripadna matrica $\mathbf{A}$ ranga dva), onda vrijedi:

$$\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{Y} = 0. \tag{66}$$

Nadalje, ako neka točka $\mathrm{X} = \lambda_0 \cdot \mathrm{Y} + \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_1$ na spojnici YX_1 (gdje je X_1 dvostruka točka) ujedno leži i na danoj singularnoj konici K^2, onda analogno (66) mora vrijediti

$$\left(\lambda_0 \cdot \mathrm{Y} + \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_1\right)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \left(\lambda_0 \cdot \mathrm{Y} + \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_1\right) = 0,$$

odakle proizlazi:

$$\lambda_0^2 \cdot \mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{Y} + \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{Y} + \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1 + \lambda_1^2 \cdot \mathrm{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1 = 0. \tag{67}$$

Koristeći svojstvo da za dvostruku točku X_1 vrijedi $\mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1 = 0$, kao i $\left(\mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = 0$ te primjenom identiteta (66) dobivamo da jednadžba (67) vrijedi za bilo koju točku spojnice YX_1.

Time je teorem dokazan.

Teorem 10.2.8

- Singularna konika K^2, prikazana matricom $\mathbf{A}$ ranga dva, sastoji se od dva (realna ili konjugirano kompleksna) pravca koji se sijeku u realnoj dvostrukoj točki te konike.

Teorem proizlazi direktno iz teorema 10.2.6 i 10.2.7.

2) Pretpostavimo sada da je rang matrice $\mathbf{A}$ jednak jedan.

Tada sustav homogenih jednadžbi

$$\mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0 \qquad (68)$$

ima dva različita nezavisna rješenja, koja ćemo označiti sa X_1 i X_2.

Pritom je i svaka jednostupčana matrica $\mathrm{X} = \lambda_0 \cdot \mathrm{X}_1 + \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_2$ također rješenje sustava (68).

Analogno gore navedenom mogu se dokazati sljedeći teoremi.

Teorem 10.2.9

Pravac (niz) dvostrukih točaka je polara bilo koje točke projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$.

Za točke niza dvostrukih točaka ne postoje određene polare.

Pol bilo kojeg pravca ravnine nije određen.

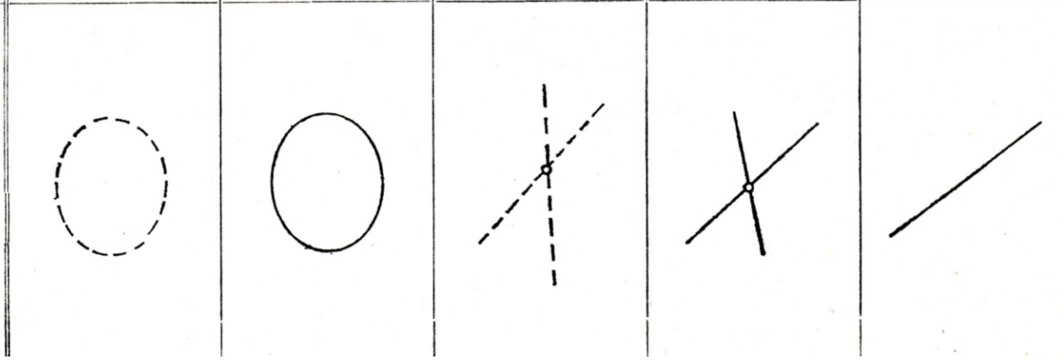
Teorem 10.2.10

- Singularna konika K^2, prikazana matricom $\mathbf{A}$ ranga jedan, sastoji se od jednog (dvostrukog) pravca.

DODATAK

Projektivna klasifikacija konika K^2

	Nesingularne		Singularne		
Rang	3	3	2	2	1
normalni oblik jednadžbe	$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$	$x_0^2-x_1^2-x_2^2=0$	$x_1^2+x_2^2=0$	$x_1^2-x_2^2=0$	$x_0^2=0$
naziv	imaginarna konika	realna konika	par konjugirano kompleksnih pravaca	par realnih pravaca	realni dvostruki pravac



Projektivna klasifikacija konika k^2 (omotaljka 2. reda)

	Nesingularne		Singularne		
Rang	3	3	2	2	1
normalni oblik jednadžbe	$u_0^2+u_1^2+u_2^2=0$	$u_0^2-u_1^2-u_2^2=0$	$u_1^2+u_2^2=0$	$u_1^2-u_2^2=0$	$u_0^2=0$
naziv	imaginarna omotaljka k^2	realna omotaljka k^2	dva pramena kompleksnih pravaca sa konj. kompl. vrhovima na realnom pravcu	dva pramena pravaca	dvostruki pramen pravaca