10. Konike

Prije nego li definiramo posebnu vrstu krivulja realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R})$, poznatu pod imenom *konike* (čunjosječnice, tj. krivulje drugog reda) koje pripadaju algebarskim krivuljama drugog reda, definirati ćemo algebarske krivulje n-tog reda.

Podsjetimo se definicije točke, pravca i relacije incidencije u realnoj projektivnoj ravnini (vidi drugo poglavlje - analitički model realne projektivne ravnine).

Ukratko:

- bilo koja točka $\mathrm{X}(x_0, x_1, x_2)$ realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R})$ definira se kao klasa uređenih trojki realnih brojeva $\lambda \cdot (x_0, x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_0, \lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, osim trojke $(0,0,0)$;
- bilo koji pravac $u[u_0, u_1, u_2]$ realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R})$ definira se kao klasa uređenih trojki realnih brojeva $\mu \cdot [u_0, u_1, u_2] = [\mu \cdot u_0, \mu \cdot u_1, \mu \cdot u_2]$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, osim trojke $[0,0,0]$;
- jednadžbom $\boxed{u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 = 0}$ dana je relacija incidencije točke $\mathrm{X}(x_0, x_1, x_2)$ i pravca $u[u_0, u_1, u_2]$.

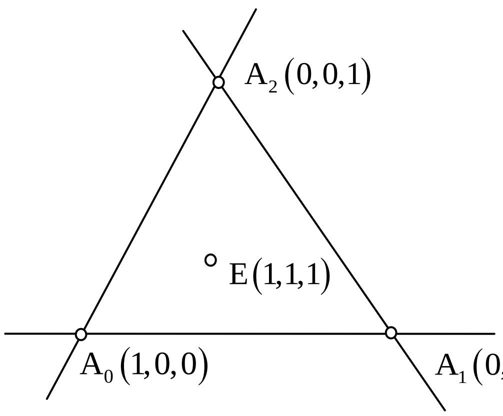
Pritom ovako definirani skup točaka, pravaca i relacije incidencije tvoriti će projektivnu ravninu, jer zadovoljavaju aksiomi A1-A5.

Nadalje, ako su x_0, x_1, x_2 (homogene koordinate točke) varijabilne, a u_0, u_1, u_2 (homogene koordinate pravca) konstantne, onda je $u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 = 0$ ***točkovna jednadžba pravca***, jer sve točke (x_0, x_1, x_2) čije koordinate zadovoljavaju danu jednadžbu čine niz točaka na pravcu $[u_0, u_1, u_2]$.

S druge strane, ako su x_0, x_1, x_2 (homogene koordinate točke) konstantne, a u_0, u_1, u_2 (homogene koordinate pravca) varijabilne, onda je $u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 = 0$ ***pravčasta jednadžba točke***, jer svi pravci $[u_0, u_1, u_2]$ čije koordinate zadovoljavaju danu jednadžbu čine pramen pravaca s vrhom u točki (x_0, x_1, x_2).

Primjenom definicije 2.5 imamo da su točke $\mathrm{A}_0(1,0,0)$, $\mathrm{A}_1(0,1,0)$ i $\mathrm{A}_2(0,0,1)$ ***vrhovi osnovnog ili koordinatnog trovrha***, a točka $\mathrm{E}(1,1,1)$ je ***jedinična točka projektivnog koordinatnog sustava ravnine.***

Pritom nikoje tri od tih četiriju točaka nisu kolinearne točke.



Podsjetimo se također (teorem 2.6) da je jednadžba spojnice dviju različitih točaka $\mathrm{A}(a_0, a_1, a_2)$ i $\mathrm{B}(b_0, b_1, b_2)$ dana sa $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ i analogno je $\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$ je jednadžba sjecišta dvaju različitih pravaca $p[p_0, p_1, p_2]$ i $q[q_0, q_1, q_2]$.

Specijalno, imamo da su tri različite točke $\mathrm{A}(a_0,a_1,a_2)$, $\mathrm{B}(b_0,b_1,b_2)$ i $\mathrm{C}(c_0,c_1,c_2)$ projektivne ravnine *kolinearne* ako i samo ako je $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$, tj. da su tri različita pravca $p[p_0,p_1,p_2]$, $q[q_0,q_1,q_2]$ i $r[r_0,r_1,r_2]$ projektivne ravnine *konkurentna* ako i samo ako je $\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0$.

Napomenimo još da prema teoremu 2.8 imamo da je točka $\mathrm{T}(t_0,t_1,t_2)$ *kolinearna* s dvjema različitim točkama $\mathrm{A}(a_0,a_1,a_2)$ i $\mathrm{B}(b_0,b_1,b_2)$ ako i samo ako je: $\boxed{t_\mathrm{i} = \lambda_0 \cdot a_\mathrm{i} + \lambda_1 \cdot b_\mathrm{i}}$, $\mathrm{i} = 0,1,2$.

Pritom su λ_0 i λ_1 realni brojevi, koji istovremeno nisu jednaki nuli.

Definirajmo sada algebarsku krivulju n-tog reda i njoj dualnu tvorevinu, koju ćemo nazvati algebarskom omotaljkom.

Definicija 10.1

Skup svih točaka realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R})$, čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu n-tog stupnja

$$f(x_0,x_1,x_2) = 0, \tag{35}$$

zovemo <u>algebarskom krivuljom n-tog reda</u> i označavamo sa K^n.

Definicija 10.2

Skup svih pravaca realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R})$, čije pravčaste koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu n-tog stupnja

$$\varphi(u_0,u_1,u_2) = 0, \tag{36}$$

zovemo <u>algebarskom omotaljkom n-tog reda</u>, i označavamo ju sa k^n.

Koristeći princip dualnosti u projektivnoj ravnini (pojam točke zamijenimo s dualnim pojmom pravac ili obrnuto, a pojam incidencije ostavimo nepromijenjen) imamo da je algebarskoj krivulji K^n dualana algebarska omotaljka k^n.

Primjer 10.3

Najjednostavniji primjer algebarske krivulje, odnosno omotaljke prvog reda može se prikazati jednadžbom prvog stupnja

$$\boxed{u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 = 0}. \tag{37}$$

Pritom treba napomenuti sljedeće:

(1) ako jednadžbu (37) shvatimo kao točkovnu jednadžbu pravca (homogene koordinate x_0,x_1,x_2 točke su varijabilne, a homogene koordinate u_0,u_1,u_2 pravca su konstantne), onda skup svih točaka

(x_0, x_1, x_2) čije koordinate x_0, x_1, x_2 zadovoljavaju jednadžbu (37) prvog stupnja je jedna algebarska krivulja 1. reda, koju u suglasnosti s definicijom 10.1 označavamo sa K^1.
Dakle, algebarska krivulja 1. reda K^1 je pravac projektivne ravnine, čija je jednadžba dana sa (37), gdje su u_0, u_1, u_2 konstantni, tj. fiksirani koeficijenti.

(2) ako jednadžbu (37) shvatimo kao pravčastu jednadžbu točke (homogene koordinate x_0, x_1, x_2 točke su konstantne, a homogene koordinate u_0, u_1, u_2 pravca su varijabilne), onda skup svih pravaca $[u_0, u_1, u_2]$ čije koordinate u_0, u_1, u_2 zadovoljavaju jednadžbu (37) prvog stupnja je jedna algebarska omotaljka 1. reda, koju u suglasnosti s definicijom 10.2 označavamo je sa k^1.

Algebarska omotaljka 1. reda k^1 je jedan pramen pravaca projektivne ravnine, koji prolazi jednom fiksnom (čvrstom) točkom (x_0, x_1, x_2).

Jasno, jednadžba (37) je ujedno jednadžba algebarske omotaljke 1. reda k^1 u kojoj su koeficijenti x_0, x_1, x_2 konstantni, tj. fiksirani.

Definicija 10.4

Za algebarsku krivulju K^n danu jednadžbom n-tog stupnja $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ kažemo da je ***nedegenerirana (ili neraspadnuta)*** ako je polinom $f(x_0, x_1, x_2)$ (n-tog stupnja) ireducibilan nad promatranim koordinatnim poljem, u našem slučaju poljem realnih brojeva.

Ako je polinom $f(x_0, x_1, x_2)$ (n-tog stupnja) reducibilan, tj. ako se on može rastaviti na dva ili više faktora (nereducibilna polinoma stupnja manjeg od n) s koeficijentima iz polja realnih brojeva, onda kažemo da je algebarska krivulja K^n ***degenerirana (ili raspadnuta)***.

Stupanj (tj. prirodan broj n) reducibilnog polinoma $f(x_0, x_1, x_2)$ jednak je zbroju stupnjeva njegovih faktora, što se geometrijski interpretira:

- degenerirana algebarska krivulja K^n, koja se prikazuje polinomom n-tog stupnja $f(x_0, x_1, x_2)$ raspada se u više nedegeneriranih krivulja, takvih da je zbroj redova tih nedegeneriranih dijelova jednak redu degenerirane algebarske krivulje K^n.

Pritom treba imati na umu da pojedini od tih faktora (polinomi stupnja manjeg od n) mogu biti isti, stoga se dio raspadnute krivulje (koji odgovara jednom te istom faktoru) mora uzeti višestruko (onoliko puta koliko se ponavlja).

Dualizacijom definicije 10.4 dobiva se definicija nedegenerirane, tj. degenerirane algebarske omotaljke.

Definicija 10.5

Za algebarsku omotaljku k^n danu jednadžbom n-tog stupnja $\varphi(u_0, u_1, u_2) = 0$ kažemo da je ***nedegenerirana (ili neraspadnuta)*** ako je polinom $\varphi(u_0, u_1, u_2)$ (n-tog stupnja) ireducibilan nad promatranim koordinatnim poljem, u našem slučaju poljem realnih brojeva.

Ako je polinom $\varphi(u_0,u_1,u_2)$ (n-tog stupnja) reducibilan, tj. ako se on može rastaviti na dva ili više faktora (nereducibilna polinoma stupnja manjeg od n) s koeficijentima iz polja realnih brojeva, onda kažemo da je algebarska omotaljka k^{n} ***degenerirana (ili raspadnuta)***.

Komentar 10.6

Iz prethodno rečenog (teorem 2.8) imamo točka $\mathrm{T}(t_0,t_1,t_2)$ *kolinearna* s dvjema različitim točkama $\mathrm{A}(a_0,a_1,a_2)$ i $\mathrm{B}(b_0,b_1,b_2)$ ako i samo ako je: $t_{\mathrm{i}}=\lambda_0\cdot a_{\mathrm{i}}+\lambda_1\cdot b_{\mathrm{i}},\quad \mathrm{i}=0,1,2$.

Ako pretpostavimo da je $\lambda_0\neq 0$, onda se identitet $t_{\mathrm{i}}=\lambda_0\cdot a_{\mathrm{i}}+\lambda_1\cdot b_{\mathrm{i}}$ može pisati u obliku $t_{\mathrm{i}}=a_{\mathrm{i}}+\lambda\cdot b_{\mathrm{i}}$, gdje je $\lambda=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$, $\lambda\neq 0$ realan broj (različit od nule).

Time imamo da se svaka točka spojnice YZ, bilo kojih dviju fiksnih točaka $\mathrm{Y}(y_0,y_1,y_2)$ i $\mathrm{Z}(z_0,z_1,z_2)$, može izraziti pomoću nehomogenog parametra λ na sljedeći način:

$$y_{\mathrm{i}}+\lambda\cdot \mathrm{z}_{\mathrm{i}},\quad \mathrm{i}=0,1,2$$

ili kraće

$$\mathrm{Y}+\lambda\cdot \mathrm{Z}.$$

Na osnovu rečenog zaključujemo da će točka $\mathrm{Y}+\lambda\cdot\mathrm{Z}$ spojnice YZ ujedno ležati i na algebarskoj krivulji K^{n} (n-tog reda) ako i samo ako njene koordinate $y_0+\lambda\cdot z_0$, $y_1+\lambda\cdot z_1$, $y_2+\lambda\cdot z_2$ $(\lambda\neq 0)$ zadovoljavaju algebarsku jednadžbu n-tog stupnja, tj. ako vrijedi:

$$f\left(y_0+\lambda\cdot z_0, y_1+\lambda\cdot z_1, y_2+\lambda\cdot z_2\right)=0. \tag{38}$$

Budući je (38) algebarska jednadžba n-tog stupnja, zaključujemo da će u polju kompleksnih brojeva jednadžba (38) imati n rješenja. Pritom se realna projektivna ravnina $P^2(\mathbb{R})$ promatra kao proširena realna projektivna ravnina $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$.

Uočimo da se među n (realnih ili kompleksnih) rješenja mogu $\mathrm{m}\,(<\mathrm{n})$ rješenja ponavljati. U tom slučaju imamo jedno m-terostruko rješenje, koje se promatra kao m jednostrukih rješenja.

Može se dogoditi da je jednadžba (38) za $\lambda\neq 0$ identitet. U ovom slučaju je pravac YZ sastavni dio promatrane algebarske krivulje K^{n}. Naime, algebarska krivulja K^{n} se u ovom slučaju degenerira na pravac YZ i još neki ostatak K^{m}, $\mathrm{m}<\mathrm{n}$.

Drugim riječima, taj je ostatak također algebarska krivulja, ali reda manjeg od n.

Dodatak 10.7

Proširena realna projektivna ravnina, koju označavamo sa $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$ je realna projektivna ravnina $P^2(\mathbb{R})$ dopunjena sa kompleksnim točkama i kompleksnim pravcima definiranim na sljedeći način:

- svaka matrica oblika $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$, čiji su elementi kompleksni brojevi, koji nisu istodobno svi jednaki nuli, predstavlja kompleksnu (imaginarnu) točku projektivne ravnine.

Matrice X i $c \cdot \mathrm{X}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ predstavljaju jednu te istu točku.

Ako u klasi $c \cdot \mathrm{X}$, gdje c prolazi poljem kompleksnih brojeva različitih od nule, postoji jedna matrica kojoj su svi elementi (koordinate) realni brojevi, onda tu točku zovemo realnom točkom.

Dualno imamo da je

- svaka matrica oblika $\mathrm{U} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, čiji su elementi kompleksni brojevi, koji nisu istodobno svi jednaki nuli, predstavlja kompleksni (imaginarni) pravac projektivne ravnine.

  Matrice U i $c \cdot \mathrm{U}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ predstavljaju jedan te isti pravac.

  Ako u klasi $c \cdot \mathrm{U}$, gdje c prolazi poljem kompleksnih brojeva različitih od nule, postoji jedna matrica kojoj su svi elementi (koordinate) realni brojevi, onda taj pravac zovemo realnim pravcem.

- Kompleksna točka X i kompleksni pravac U su incidentni ako i samo ako vrijedi

$$\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{X} = 0. \tag{39}$$

Sa (39) je dana relacija incidencije u proširenoj realnoj projektivnoj ravnini $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$.

Jasno, relcija (39) je analogon relacije incidencije $u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 = 0$ točke $\mathrm{X}(x_0, x_1, x_2)$ i pravca $u[u_0, u_1, u_2]$ u realnoj projektivnoj ravnini $P^2(\mathbb{R})$.

(Proširenje realne projektivne ravnine kompleksnim elementima prikazamo je detaljnije u udžbeniku: D.Palman, Projektivna geometrija, str. 148-153)

Teorem 10.8

Algebarska krivulja n-tog reda proširene realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$ i neki pravac imaju općenito n zajedničkih točaka (realnih ili konjugirano kompleksnih).

Kažemo da pravac siječe algebarsku krivulju n-tog reda općenito u n točaka.

Dualno tome, nekom točkom prolazi općenito n pravaca neke algebarske omotaljke n-tog reda.

Dokaz teorema direktno proizlazi iz razmatranja provedenih u komentaru 10.6.

Naime, sjecište nekog pravca i algebarske krivulje n-tog reda dano je jednadžbom oblika (38), koja se dobiva uvrštavanjem koordinata danog pravca u algebarsku jednadžbu n-tog stupnja (koja je zapravo jednadžba algebarske krivulje K^{n}).

Drugim riječima, sjecište nekog pravca i algebarske krivulje n-tog reda prikazuje se algebarskom jednadžbom n-tog stupnja, koja u polju kompleksnih brojeva ima n rješenja.

Jasno, pritom se realna projektivna ravnina $P^2(\mathbb{R})$ promatra kao proširena realna projektivna ravnina $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$ (vidi dodatak 10.7).

- U nastavku će se promatrati isključivo algebarske krivulje i omotaljke drugog reda.

Definicija 10.9

Algebarsku krivulju K^2 drugog reda zovemo ***konikom*** K^2.

Dualno tome, ***konika*** k^2 je algebarska omotaljka drugog reda.

Uzimajući u obzir definiciju 10.1 imamo da koniku K^2, tj. algebarsku krivulju K^2 čine sve točke X čije koordinate x_0, x_1, x_2 zadovoljavaju jednadžbu:

$$\sum_{\mathrm{i,j}=0}^{2} a_{\mathrm{ij}}\, x_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{j}} = 0\,, \tag{40}$$

gdje su koeficijenti a_{ij} simetrični, tj. vrijedi $a_{\mathrm{ij}} = a_{\mathrm{ji}}$ za svaki $\mathrm{i,j} = 0,1,2$.

U suglasnosti s provedenim razmatranjima u dodatku 10.7 imamo da se u proširenoj realnoj projektivnoj ravnini $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$ jednadžba (40) zapisuje u matričnom obliku:

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\,, \tag{41}$$

gdje je:

- X jednostupčana koordinatna matrica, tj. matrica oblika $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (čiji su elementi x_0, x_1, x_2 kompleksni brojevi, koji nisu istodobno svi jednaki nuli), a predstavlja kompleksnu (tj. imaginarnu) točku X projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$;
- $\mathbf{A} = \left(a_{\mathrm{ij}}\right)$, $\mathrm{i,j} = 0,1,2$ je kvadratna simetrična matrica trećeg reda, kojoj su elementi a_{ij} koeficijenti konike K^2.

Napomenimo da pretpostavljena simetričnost matrice $\mathbf{A} = \left(a_{\mathrm{ij}}\right)$ ne ograničava općenitost. Naime, neki polinom $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathrm{X}$ je također ternarna kvadratna forma iako matrica $\mathbf{C} = \left(c_{\mathrm{ij}}\right)$ nije simetrična matrica trećeg reda. No u ovom slučaju se nesimetrična matrica $\mathbf{C} = \left(c_{\mathrm{ij}}\right)$, $\mathrm{i,j} = 0,1,2$ može zamijeniti odgovarajućom simetričnom matricom $\frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{C} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\right)$, a da se kvadratna forma pri tome ne promijeni.

Raspisivanjem lijeve strane matrične jednadžbe (41) dobiva se homogeni polinom drugog stupnja po trima nepoznanicama x_0, x_1, x_2, koji je dan sa (40).

Konkretno uzimajući u obzir da je $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \left(a_{\mathrm{ij}}\right)$, $\mathrm{i,j} = 0,1,2$ dobivamo da iz (41) proizlazi:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} a_{00}\,x_0 + a_{01}\,x_1 + a_{02}\,x_2 & a_{01}\,x_0 + a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 & a_{02}\,x_0 + a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{00}\,x_0\,x_0 + a_{01}\,x_1\,x_0 + a_{02}\,x_2\,x_0 + a_{01}\,x_0\,x_1 + a_{11}\,x_1\,x_1 + a_{12}\,x_2\,x_1 + a_{02}\,x_0\,x_2 + a_{12}\,x_1\,x_2 + a_{22}\,x_2\,x_2 = 0$$

$$a_{00}\,x_0\,x_0 + a_{01}\,x_0\,x_1 + a_{02}\,x_0\,x_2 + a_{01}\,x_1\,x_0 + a_{11}\,x_1\,x_1 + a_{12}\,x_1\,x_2 + a_{02}\,x_2\,x_0 + a_{12}\,x_2\,x_1 + a_{22}\,x_2\,x_2 = 0$$

ili
$$\sum_{\mathrm{i,j}=0}^{2} a_{\mathrm{ij}}\,x_{\mathrm{i}}\,x_{\mathrm{j}} = 0\,.$$

Na osnuvu rečenog zaključujemo da je konika K^2 algebarska krivulja K^2 drugog reda, ali isto tako i kvadratna forma $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}$ takva da vrijedi (41).

Definicija 10.10

Neka je dana kvadratna forma $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}$.

Tada se simetrična matrica $\mathbf{A} = \left(a_{\mathrm{ij}}\right)$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$ naziva <u>matrica te kvadratne forme</u>, a determinanta $|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A}$ se naziva <u>diskriminantom ili determinantom te kvadratne forme.</u>

Rang matrice $\mathbf{A}$ se zove <u>rang dane kvadratne forme</u> $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}$.

Definicija 10.11

<u>Koniku</u> K^2, odnosno <u>kvadratnu formu</u> $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}$ zovemo <u>*singularnom (degeneriranom ili raspadnutom)*</u> ako je diskriminanta, (tj. determinanta te kvadratne forme) jednaka nuli.

Dakle, ako je $|\mathbf{A}| = 0$, onda kažemo da je konika K^2, tj. kvadratna forma $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}$ singularna.

U protivnom, ako je $|\mathbf{A}| \neq 0$, onda kažemo da je konika K^2, tj. kvadratna forma $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}$ nesingularna (nedegenerirana ili neraspadnuta).

Uočimo, ako je $|\mathbf{A}| = 0$, onda je rang matrice $\mathbf{A}$ manji od tri.

- Primjenom definicije 10.9 imamo da koniku k^2, tj. algebarsku omotaljku drugog reda čine svi pravci U čije koordinate u_0, u_1, u_2 zadovoljavaju jednadžbu:

$$\sum_{\mathrm{i,j}=0}^{2} b_{\mathrm{ij}}\,u_{\mathrm{i}}\,u_{\mathrm{j}} = 0\,, \tag{42}$$

gdje su koeficijenti b_{ij} simetrični, tj. vrijedi $b_{\mathrm{ij}} = b_{\mathrm{ji}}$ za svaki $\mathrm{i,j} = 0,1,2$.

Jednadžba (42) je u matričnom obliku dana sa:

$$\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathrm{U} = 0\,, \quad \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}\,. \tag{43}$$

Jasno za koniku k^2 vrijede sve izreke kao i za koniku K^2. Te se izreke dobivaju primjenom principa dualnosti u (proširenoj) realnoj projektivnoj ravnini.