8. Jednodimenzionalni projektiviteti (projektivne transformacije niza točaka)

U ovom odjeljku će predmet razmatranja biti projektivitet dva kolokalna niza točaka.
Podsjetimo se, za dva niza točaka kažemo da su kolokalna, ako oni imaju isti pravac nosioc.
Dakle, promatrati će se projektivitet (dva) niza točaka na istom pravcu nosiocu, tj. projektivno preslikavanje pravca na samog sebe.
U nekim litearaturama se projektivitet niza točaka naziva još i projektivna transformacija niza točaka, stoga će se u nastavku koristiti oba termina.

Definicija 8.1

Ako je u nekoj projektivnoj transformaciji, tj. projektivitetu niza točaka neka točka (tog niza) pridružena sama sebi, onda tu točku nazivamo ***invarijantnom ili fiksnom točkom*** te projektivne transformacije, tj. projektiviteta.

Ako je za neku projektivnu transformaciju, tj. projektivitet niza točaka svaka točka tog niza invarijantna (tj. fiksna), onda tu projektivnu transformaciju, tj. projektivitet nazivamo ***identitetom***.

- Projektivitet niza točaka (na istom pravcu nosiocu) koji ima tri ili više različite invarijantne (fiksne) točke je identitet (tj. svaku točku preslikava na samu sebe).

- Projektivitet niza točaka (na istom pravcu nosiocu) koji nije identitet može imati dvije, jednu ili nijednu invarijantnu (fiksnu) točku.

Definicija 8.2

Projektivnu transformaciju, tj. projektivitet niza točaka zovemo
- ***hiperbolički projektivitet*** ako ima dvije različite invarijantne (fiksne) točke,
- ***parabolički projektivitet*** ako ima jednu invarijantnu (fiksnu) točku,
- ***eliptički projektivitet*** ako nema nijednu invarijantnu (fiksnu) točku.

Napomenimo da kod paraboličkog projektiviteta su dvije fiksne točke zapravo jednake.

Primjer 8.3

Konstrukcija hiperboličkog i paraboličkog projektiviteta.
Neka su A, B, C, D i E bilo koje (međusobno različite) kolinearne točke, tj. neka leže na pravcu *p*.
Konstruirajmo hiperbolički ili parabolički projektivitet $(\mathrm{A},\mathrm{E},\mathrm{C})\overline{\wedge}(\mathrm{B},\mathrm{D},\mathrm{C})$ kojemu je C invarijantna točka.

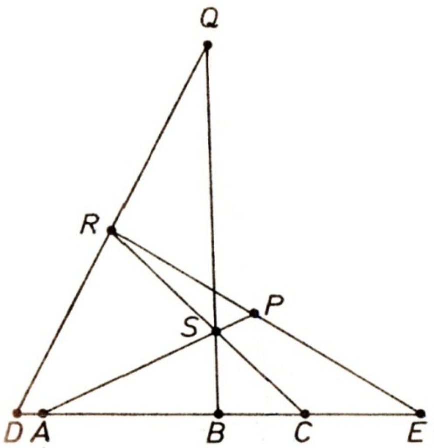
Podsjetimo se, primjenom teorema 6.7 imamo da se svaki projektivitet kolokalnih nizova točaka može prikazati lancem od ne više od tri perspektiviteta. U našem slučaju imamo da se projektivitet $(A,E,C)\overline{\wedge}(B,D,C)$ može prikazati lancem od dva perspektiviteta, jer je tim projektivitetom točka C pridružena sama sebi (tj. C je invarijantna točka).

Dakle imamo: $$(A,E,C)\overline{\wedge}(B,D,C)=(A,E,C)\overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}}(S,R,C)\overset{Q}{\overline{\overline{\wedge}}}(B,D,C)$$

kao što je prikazano na slici 33.

Pritom za prethodno zadane kolinearne točke A, B, C, D i E, kroz točku C povlačimo neki pravac p' i odabiremo neku proizvoljnu točku P, koja ne leži na pravcu p', ali ni na pravcu *p*.

(Uvjetom da točka P ne leži na pravcu *p* osigurava se da P nije kolinearna s zadanih pet točaka).



slika 33

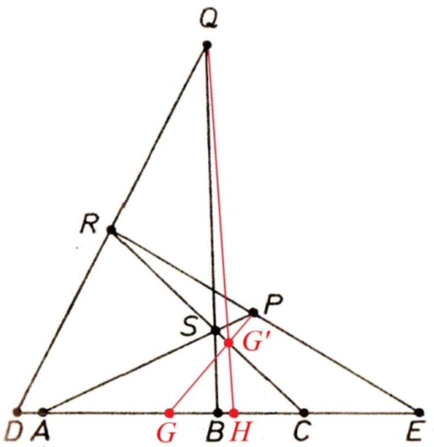
Iz točke P projiciramo trojku točaka A, E, C (pravca *p*) na trojku točaka S, R, C (pravca p'), čime imamo: $(A,E,C)\overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}}(S,R,C)$.

Sada dobivenu trojku točaka S, R, C (pravca p') projiciramo iz točke Q na trojku točaka B, D, C (pravca *p*), čime imamo: $(S,R,C)\overset{Q}{\overline{\overline{\wedge}}}(B,D,C)$.

- Pritom se točka Q dobiva kao sjecište spojnica (pravaca) SB i RD.

Time smo dobili projektivitet

$$(A,E,C)\overline{\wedge}(B,D,C)=(A,E,C)\overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}}(S,R,C)\overset{Q}{\overline{\overline{\wedge}}}(B,D,C).$$



slika 34

Danim projektivitetom moguće je bilo koju točku pravca *p* (na kojemu leže točke A, B, C, D, E) preslikati na njegovu sliku.

Tako je konkretno na slici 34 prikazan projektivitet

$$(A,E,C,G)\overline{\wedge}(B,D,C,H)$$
$$=(A,E,C,G)\overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}}(S,R,C,G')\overset{Q}{\overline{\overline{\wedge}}}(B,D,C,H).$$

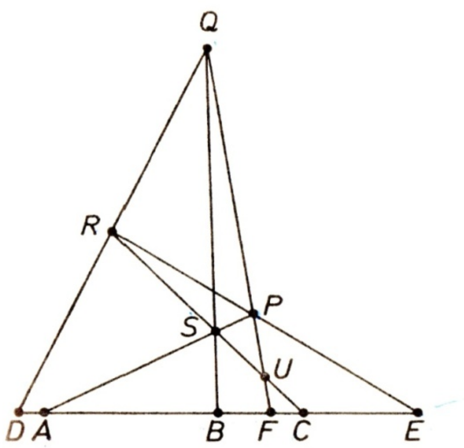
Zanima nas da li uz točku C postoji još jedna invarijantna (fiksna) točka.

Lako se vidi da ako postoji još jedna invarijantna točka (različita od točke C), onda ona mora biti kolinearna s točkama P i Q, tj. centrima perspektiviteta, kojim je prikazan početni projektivitet

$$(\mathrm{A},\mathrm{E},\mathrm{C})\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{B},\mathrm{D},\mathrm{C}) = (\mathrm{A},\mathrm{E},\mathrm{C})\overset{\mathrm{P}}{\doublebarwedge}(\mathrm{S},\mathrm{R},\mathrm{C})\overset{\mathrm{Q}}{\doublebarwedge}(\mathrm{B},\mathrm{D},\mathrm{C}).$$

Dakle, takva točka može biti samo točka F (prikazana na slici 35.a).

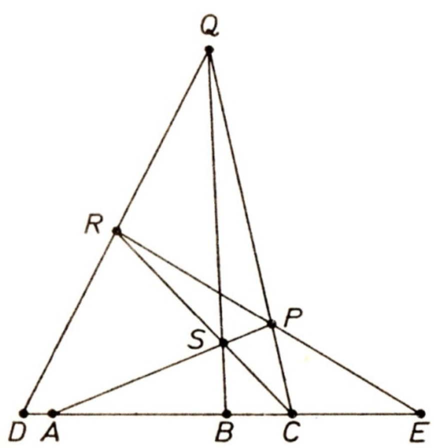
- Napomenimo da se točka F dobiva kao sjecište pravca PQ i pravca *p* (na kojemu leže zadane točke A, B, C, D, E), pri čemu to sjecište može biti
  - točka F različita od točke C, kao što je prikazano na slici 35.a ili
  - točka C (čime se dobiva da su dvije fiksne točke zapravo jednake, tj. $\mathrm{F} = \mathrm{C}$), kao što je prikazano na slici 35.b.



slika 35.a

$$(\mathrm{A},\mathrm{E},\mathrm{C},\mathrm{F})\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{B},\mathrm{D},\mathrm{C},\mathrm{F})$$
$$= (\mathrm{A},\mathrm{E},\mathrm{C},\mathrm{F})\overset{\mathrm{P}}{\doublebarwedge}(\mathrm{S},\mathrm{R},\mathrm{C},\mathrm{U})\overset{\mathrm{Q}}{\doublebarwedge}(\mathrm{B},\mathrm{D},\mathrm{C},\mathrm{F})$$

hiperbolički projektivitet



slika 35.b

$$(\mathrm{A},\mathrm{E},\mathrm{C},\mathrm{C})\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{B},\mathrm{D},\mathrm{C},\mathrm{C})$$
$$= (\mathrm{A},\mathrm{E},\mathrm{C},\mathrm{C})\overset{\mathrm{P}}{\doublebarwedge}(\mathrm{S},\mathrm{R},\mathrm{C},\mathrm{C})\overset{\mathrm{Q}}{\doublebarwedge}(\mathrm{B},\mathrm{D},\mathrm{C},\mathrm{C})$$

parabolički projektivitet

Primjer ***eliptičkog projektiviteta*** je bilo koji projektivitet koji nema nijednu invarijantnu (fiksnu) točku. Kao primjer može poslužiti projektivitet $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{B},\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{C})$, koji je na slici 27 (str. 47) prikazan lancem od tri projektiviteta:

$$(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{B},\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{C}) = (\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})\overset{\mathrm{O}}{\doublebarwedge}(\mathrm{A},\mathrm{B}',\mathrm{C}',\mathrm{D}')\overset{\mathrm{C}}{\doublebarwedge}(\mathrm{B},\mathrm{B}',\mathrm{O},\mathrm{B}'')\overset{\mathrm{D}'}{\doublebarwedge}(\mathrm{B},\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{C}).$$

Definicija 8.4

Involutivnim preslikavanjem $\mathcal{P}$ nekog skupa točaka na sebe zovemo ono preslikavanje koje izvedeno dvaput uzastopce daje identitet, tj. ako je

$$\mathcal{P}\cdot\mathcal{P}=\mathcal{P}^2=\mathcal{I}\,. \tag{26}$$

Uočimo da iz definicije involutivnog preslikavanja proizlazi $\mathcal{P}=\mathcal{P}^{-1}$, čime zaključujemo da je involutivno preslikavanje identično sa sebi inverznim preslikavanjem.

Komentar 8.5

Prema Von Staudt-ovoj definiciji imamo:

- involucija je projektivitet perioda dva, odnosno projektivitet $(\mathrm{X},\mathrm{X}')\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{X}',\mathrm{X})$ koji uzajamno preslikava parove točaka.

Pritom ako neki projektivitet $(\mathrm{X},\mathrm{X}')\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{X}',\mathrm{X})$ uzajamno preslikava jedan par točaka, onda on uzajamno preslikava sve parove točaka pa je samim time involucija. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 8.6

Projektivitet koji preslikava uzajamno dvije različite točke je involucija.

Dokaz:

Neka je $\mathrm{X}\,\overline{\wedge}\,\mathrm{X}'$ neki projektivitet kojim se točka X preslikava na točku X'.

Pretpostavimo da dani projektivitet $\mathrm{X}\,\overline{\wedge}\,\mathrm{X}'$ uzajamno preslikava jedan par točaka A,A', tj. neka je:

$$(\mathrm{A},\mathrm{A}',\mathrm{X})\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{A}',\mathrm{A},\mathrm{X}'),$$

gdje je X bilo koja točka pravca AA'.

Primjenom teorema 6.10 imamo da postoji projektivitet koji preslikava četvorku točaka A, A', X, X' u četvorku točaka A', A, X', X, odnosno da vrijedi $(\mathrm{A},\mathrm{A}',\mathrm{X},\mathrm{X}')\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{A}',\mathrm{A},\mathrm{X}',\mathrm{X})$.

Nadalje primjenom temeljnog teorema projektivne geometrije (teorem 7.2, prema kojemu postoji točno jedan projektivitet koji tri proizvoljne kolinerane točke preslikava u tri po volji odabrane kolinearne točke) imamo da su projektiviteti $(\mathrm{A},\mathrm{A}',\mathrm{X},\mathrm{X}')\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{A}',\mathrm{A},\mathrm{X}',\mathrm{X})$, $(\mathrm{A},\mathrm{A}',\mathrm{X})\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{A}',\mathrm{A},\mathrm{X}')$ međusobno jednaki. Lako se vidi da je projektivitet $(\mathrm{A},\mathrm{A}',\mathrm{X},\mathrm{X}')\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{A}',\mathrm{A},\mathrm{X}',\mathrm{X})$ involucija.

Pritom smo projektivitetom $(\mathrm{A},\mathrm{A}',\mathrm{X},\mathrm{X}')\,\overline{\wedge}\,(\mathrm{A}',\mathrm{A},\mathrm{X}',\mathrm{X})$ dobili da se osim para točaka A,A' uzajamno preslikava i par točaka X,X'.

- Na osnovu rečenog zaključujemo da bilo koje četiri kolinearne točke A, A', B, B' određuju projektivitet $(A, A', B)\overline{\wedge}(A', A, B')$, koji je involucija.

Drugim riječima, involucija je jednoznačno određena sa bilo koja dva para pridruženih točaka.
Na osnovu toga proizlazi da svaka involucija koja ima jednu invarijantnu točku mora imati još jednu invarijantnu točku (različitu od prve) koja će zajedno s prvom invarijantnom točkom činiti par pridruženih točaka.

Teorem 8.7

Svaka involucija koja ima jednu invarijantnu točku B ima još jednu invarijantnu točku A, koja je harmonički konjugirana sa B s obzirom na bilo koji par pridruženih točaka.
Dokaz: sami za vježbu.

Zaključujemo:

- Involucija ne može biti parabolička.
- Svaka involucija koja nije eliptička mora biti hiperbolička.

Pritom se pod hiperboličkom involucijom podrazumijeva involucija koja ima dvije invarijantne točke. Analogno se pod eliptičkom involucijom podrazumijeva involucija koja nema invarijantne točke.
Naime, involucija (involucija niza točaka ili involutivni projektivitet) može biti hiperbolička involucija ili eliptička involucija.