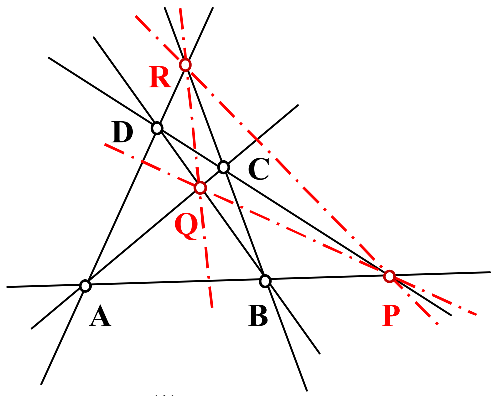
5. Potpuni četverovrh i harmonička četvorka točaka

U projektivnoj geometriji posebnu ulogu imaju ravninske figure: potpuni četverovrh i potpuni četverostran, stoga podsjetimo se najprije potpunog četverovrha (definicija 3.4 i primjer 3.6).

- Ravninska figura koja se sastoji od 4 komplanarne točke A, B, C i D (od kojih po tri nisu kolinearne) i od svih $\binom{4}{2} = 6$ spojnica (pravaca) AB, AC, AD, BC, BD i CD od po dviju od danih četiri točaka zove se ***potpuni četverovrh***.

Točke A, B, C i D zovemo vrhovima potpunog četverovrha, a njihove spojnice AB, AC, AD, BC, BD i CD stranicama potpunog četverovrha.



slika 16

Dvije stranice potpunog četverovrha koje ne prolaze istim vrhom tog četverovrha zovemo **parom suprotnih stranica**.
U četverovrhu postoje tri para suprotnih stranica, a to su:

par AB i CD; par AC i BD; par AD i BC.

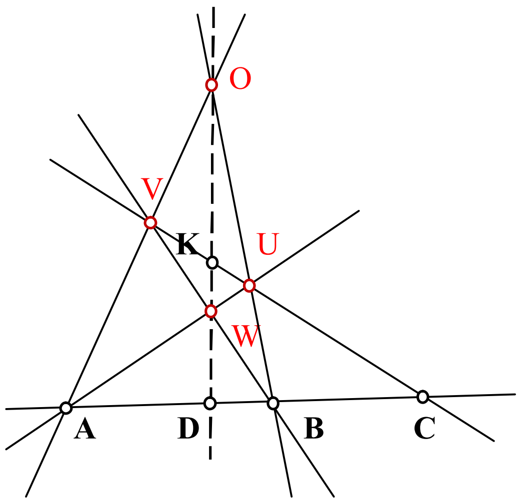
Neka su $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$, $R = AD \cap BC$.

Sjecišta P, Q i R parova suprotnih stranica zovemo **dijagonalnim točkama potpunog četverovrha**.

Spojnice PQ, QR i PR po dviju dijagonalnih točaka zovemo **dijagonalama potpunog četverovrha**.
Dijagonalne točke i dijagonale čine **dijagonalni trovrh potpunog četverovrha**.

Prije nego li uvedemo pojam harmoničke četvorke točaka promotrimo slijedeću konstrukciju, koja je u direktnoj vezi s potpunim četverovrhom, njegovim dijagonalnim točkama, a samim time i njegovim dijagonalama.

Na spojnici točaka A i B odaberimo točku C (aksiom A3) i četvrtu točku O, koja ne leži na spojnici AB (aksiom A4).
Nadalje, primjenom aksioma A3 imamo da na spojnici OB postoji točka U.



slika 17

Označimo sa V sjecište pravaca CU i OA
Te sa W sjecište pravac a BV i AU.

Uočimo potpuni četverovrh ABUV te njegove dijagonalne točke $C = AB \cap UV$, $W = AU \cap BV$, $O = AV \cap BU$.

Ako dijagonalne točke C, W i O nisu kolinearne, onda spojnica OW siječe pravac AB u točki D.

Dobili smo harmoničku četvorku točaka A, B, C i D.

Pritom su točke A i B vrhovi potpunog četverovrha ABUV. Točka C je dijagonalna točka (potpunog četverovrha ABUV) koja leži na pravcu AB, a točka D je sjecište pravca AB i spojnice WO preostalih dviju dijagonalnih točaka W i O tog potpunog četverovrha ABUV.

Napomenimo da se harmonička četvorka točaka A, B, C i D može dobiti na još jedan način.

Na slici 17 promatrajmo potpuni četverovrh OVWU i njegove dijagonalne točke:

$$A = OV \cap WU\,,\quad K = OW \cap VU\,,\quad B = OU \cap VW\,.$$

Na ovaj način dobili smo da su točke A i B dvije dijagonalne točke potpunog četverovrha OVWU. Lako se vidi da su točke C i D sjecište pravca AB sa onim parom suprotnih stranica (potpunog četverovrha OVWU), koje prolaze trećom dijagonalnom točkom tog potpunog četverovrha OVWU.

Definicija 5.1

***Za točku* D *kažemo da je harmonički konjugirana točki* C *s obzirom na par točaka* A *i* B** i označavamo sa H(AB, CD) ako vrijedi:

(i) točke A i B su vrhovi potpunog četverovrha, točka C je dijagonalna točka tog četverovrha na pravcu AB, a točka D je sjecište pravca AB i spojnice preostalih dviju dijagonalnih točaka tog potpunog četverovrha;

ili

(ii) točke A i B su dvije dijagonalne točke potpunog četverovrha, a točke C i D su sjecišta pravca AB s preostalim dvijema suprotnim stranicama, koje prolaze trećom dijagonalnom točkom tog potpunog četverovrha.

Za točku D kažemo da je *četvrta harmonička točka s obzirom na točke* A, B i C.

Četvorku točaka A, B, C i D definiranu sa (i), odnosno sa (ii) zovemo ***harmoničkom četvorkom točaka*** i označavamo sa H(AB, CD).

Teorem 5.2

Ako je točka D harmonički konjugirana točki C s obzirom na par točaka A i B, onda je i točka C harmonički konjugirana točki D s obzirom na isti par točaka A i B.

Drugim rječima ako vrijedi H(AB, CD), onda vrijedi i H(AB, DC).

Teorem 5.2 direktno slijedi iz (ii) u definiciji 5.1.

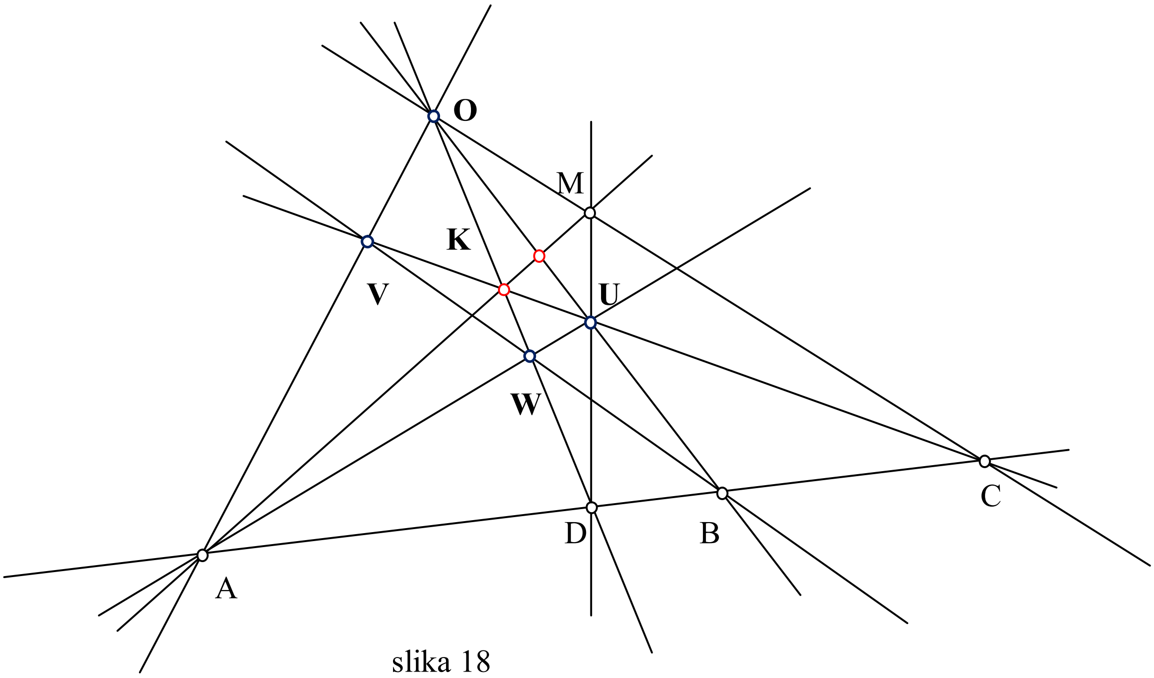
Time kažemo da je *par točaka* C, D *harmonički konjugiran paru točaka* A, B.

Teorem 5.3

Ako je par točaka C, D harmonički konjugiran paru točaka A, B, onda je i par točaka A, B harmonički konjugiran paru točkaka C, D.

Drugim riječima ako vrijedi H(AB, CD), onda vrijedi i H(CD, AB).

Dokaz:



slika 18

Pretpostavimo da vrijedi H(AB, CD).

Drugim riječima, neka je zadan potpuni četverovrh OVWU takav da su mu točke $A = OV \cap WU$ i $B = OU \cap VW$ dvije dijagonalne točke, a točke $C = AB \cap VU$ i $D = AB \cap OW$ su sjecišta pravca AB sa onim parom suprotnih stranica koje prolaze trećom dijagonalnom točkom $K = VU \cap OW$ tog potpunog četverovrha OVWU.

Uočimo da stranice trovrha VWK siječu pravac AB u točkama B, D i C, stoga promatramo da li možemo konstruirati neki trovrh koji će biti perspektivan trovrhu VWK s obzirom na pravac AB.

Sa slike 18 možemo vidjeti da će to biti upravo trovrh OUM, pri čemu se točka M dobiva kao sjecište pravca DU sa pravcem CO.

Sada se lako može vidjeti da su trovrsi VWK i OUM perspektivni s obzirom na pravac AB, jer im se parovi pridruženih pravaca sijeku u točkama pravca AB, odnosno jer je

$$B = VW \cap OU,\ D = WK \cap UM, C = VK \cap OM.$$

Iz perspektiviteta trovrha VWK i OUM s obzirom na pravac AB, primjenom Desarguesovog teorema, proizlazi perspektivitet trovrha VWK i OUM i s obzirom na neki centar (tj. točku).

Zaključujemo da je upavo točka A centar tog perspektiviteta, jer je prema početnoj pretpostavci $A = VO \cap WU$, gdje su VO i WU spojnice dva para pridruženih vrhova trovrha VWK i OUM.

Nadalje, prema definiciji perspektiviteta s obzirom na neki centar imamo da i pravac KM (tj. spojnica trećeg para pridruženih vrhova trovrha VWK i OUM) mora prolaziti točkom A (slika 18).

Na navedeni način dobili smo potpuni četverovrh OKUM, kojemu su točke $C = OM \cap KU$ i $D = OK \cap UM$ dvije dijagonalne točke, a točke $A = CD \cap KM$ i $B = CD \cap OU$ su sjecišta pravca CD sa onim parom suprotnih stranica KM i OU (koje prolaze trećom dijagonalnom točkom) tog potpunog četverovrha OKUM.

Na taj smo način dobili da je par točaka A, B harmonički konjugiran paru točkaka C, D, odnosno da vrijedi H(CD, AB).

Time je teorem dokazan.

Teorem 5.4

Ako za četiri kolinearne točke A, B, C i D vrijedi H(AB, CD), onda vrijedi i

H(AB, DC), H(CD, AB), H(CD, BA), H(BA, CD), H(BA, DC), H(DC, AB), H(DC, BA).

Teorem 5.4 direktno slijedi iz teorema 5.2 i 5.3.

Teorem 5.5

Ako su A, B i C tri kolinearne točke nekog pravca *a*, onda na tom pravcu postoji točno jedna točka D takva da vrijedi H(AB, CD).

Dokaz: na vježbama.

Teorem 5.4 iskazuje jedinstvenost egzistencije četvrte točke harmoničke četvorke s obzirom na zadane prve tri točke. Drugim riječima, četvrta harmonička točka jednoznačno je određena prvim trima točkama.

Komentar 5.6

Navedena ramatranja mogu se dualizirati tako da se umjesto potpunog četverovrha uvede njemu dualna figura potpuni četverostran.

Ravninska figura koja se sastoji od 4 komplanarna pravca a, b, c i d (od kojih po tri nisu konkurentna) i od svih $\binom{4}{2}=6$ sjecišta $a \cap b$, $a \cap c$, $a \cap d$, $b \cap c$, $b \cap d$, $c \cap d$, od po dva od tih pravaca zove se ***potpuni četverostran***.

Pravce a, b, c i d zovemo <u>stranicama</u>, a njihova sjecišta A, B, C, D, E i F zovemo <u>vrhovima potpunog četverostrana</u> *abcd*.

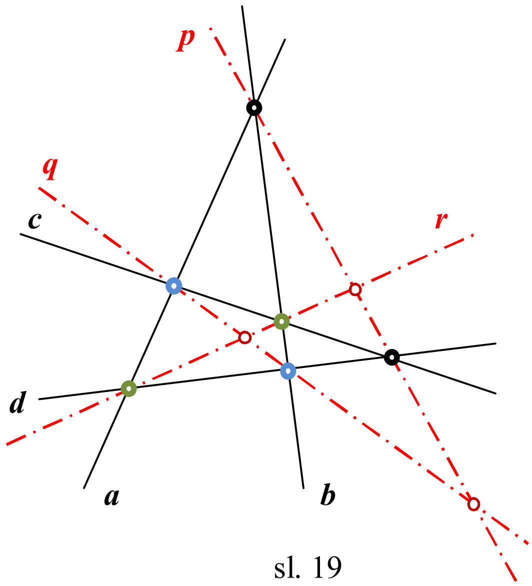
Dva vrha potpunog četverostrana koji ne leže na istoj stranici zovemo **parom suprotnih vrhova**.

U potpunom četverostranu postoje tri para suprotnih vrhova:

par $a \cap b$ i $c \cap d$; par $a \cap c$ i $b \cap d$; par $a \cap d$ i $b \cap c$.

Spojnice p, q i r parova suprotnih vrhova zovemo **dijagonalnim stranicama potpunog četverostrana**.

Ako dijagonalni pravci (tj. dijagonalne stranice) p, q i r nisu konkurentni, onda oni čine **dijagonalni trostran potpunog četverostrana** (vidi sliku 19).



sl. 19

Za tri pravca a, b i c jednog pramena s vrhom u točki O možemo konstruirati četvrti pravac d tog pramena, koji je *harmonički konjugiran* pravcu c s obzirom na pravce a i b.

Kažemo da ta četiri pravca čine <u>*harmoničku četvorku konkurentnih pravaca*</u> i označavamo je sa H(*ab*, *cd*).

Konsrukcija H(*ab*, *cd*) harmoničke četvorke konkurentnih pravaca provodi se dualno konstrukciji H(AB, CD) harmoničke četvorke kolinearnih točaka (vidi slike 20, 21).

Drugim rječima, konstrukcija H(*ab*, *cd*), tj. harmoničke četvorke konkurentnih pravaca može se dobiti na dva načina i to upravo dualizacijom (i) i (ii) u definiciji 5.1, čime imamo:

***Za pravac d kažemo da je harmonički konjugiran pravcu c s obzirom na pravce a i* b** i označavamo sa H(*ab*, *cd*) ako vrijedi:

(i) pravci a i b su stranice potpunog četverostrana, koje se sijeku u točki O, pravac c je dijagonalna stranica tog četverostrana, koji prolazi točkom O, pravac d je spojnica točke O i sjecišta preostalih dviju dijagonalnih stranica tog potpunog četverostrana;

ili

(ii) pravci a i b su dvije dijagonalne stranice potpunog četverostrana (koje se sijeku u točki O), a pravci c i d su spojnice točke O s preostala dva suprotna vrha, kojim prolazi treća dijagonalna stranica tog potpunog četverostrana.

Za pravac d kažemo da je <u>*četvrti harmonički pravac s obzirom na pravce a, b i c.*</u>

Četvorku pravaca a, b, c i d definiranu sa (i), odnosno sa (ii) zovemo ***harmoničkom četvorkom pravaca*** i označavamo sa H(*ab*, *cd*).

Obrazložimo tvrdnje (i), (ii) na konkretnom primjeru. S obzirom na tvrdnju (i) uočimo na slici 20 potpuni četverostran <u>*abuv.*</u> Tada imamo: pravci a i b su stranice potpunog četverostrana, takve da je $a \cap b = \mathrm{O}$

Parovi suprotnih vrhova su:

$a \cap b$ i $u \cap v$ (<u>pravac c</u>, tj. dijagonalna stranica)

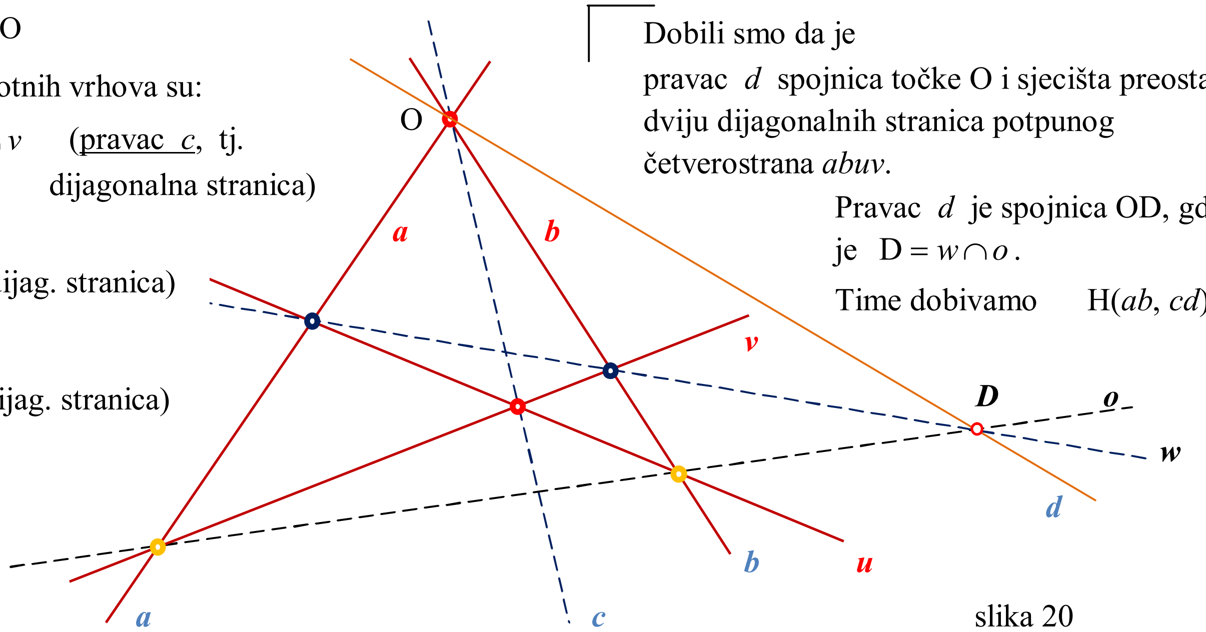
$a \cap u$ i $b \cap v$ (pravac w – dijag. stranica)

$a \cap v$ i $b \cap u$ (pravac o – dijag. stranica)

Dobili smo da je pravac d spojnica točke O i sjecišta preostalih dviju dijagonalnih stranica potpunog četverostrana *abuv*.

Pravac d je spojnica OD, gdje je $\mathrm{D} = w \cap o$.

Time dobivamo H(*ab*, *cd*).



slika 20

S obzirom na tvrdnju (ii) promatrajmo sada na slici 21 potpuni četverostran <u>*ovuw.*</u>

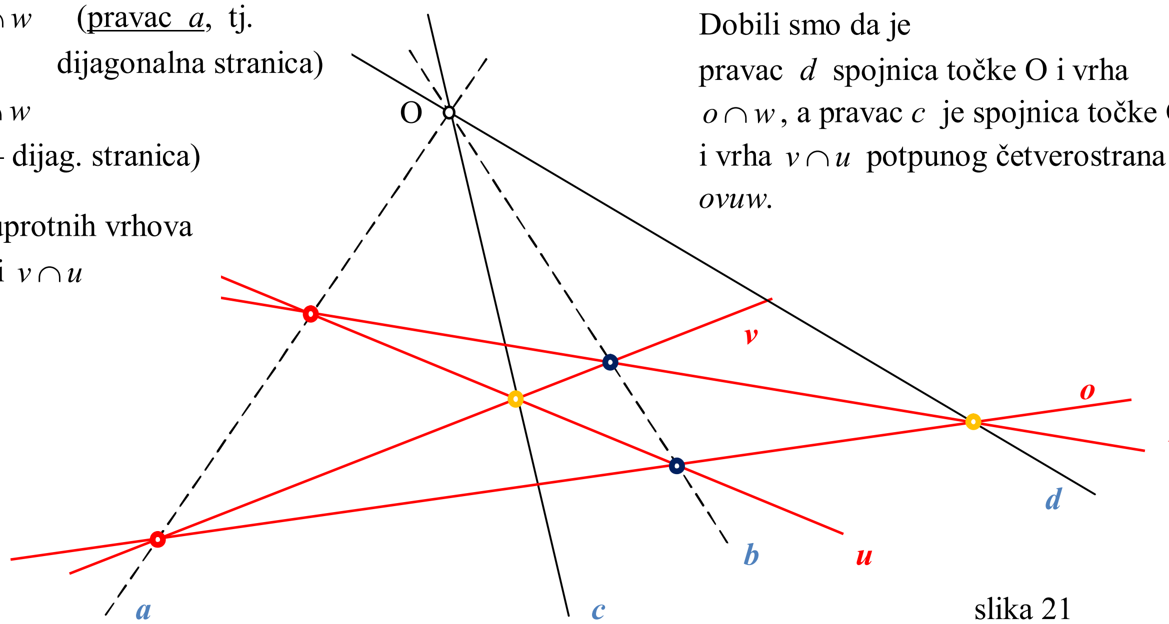
Tada imamo sljedeće parove suprotnih vrhova

$o \cap v$ i $u \cap w$ (<u>pravac a</u>, tj. dijagonalna stranica)

$o \cap u$ i $v \cap w$ (<u>pravac b</u> – dijag. stranica)

Treći par suprotnih vrhova je $o \cap w$ i $v \cap u$

Dobili smo da je pravac d spojnica točke O i vrha $o \cap w$, a pravac c je spojnica točke O i vrha $v \cap u$ potpunog četverostrana *ovuw*.

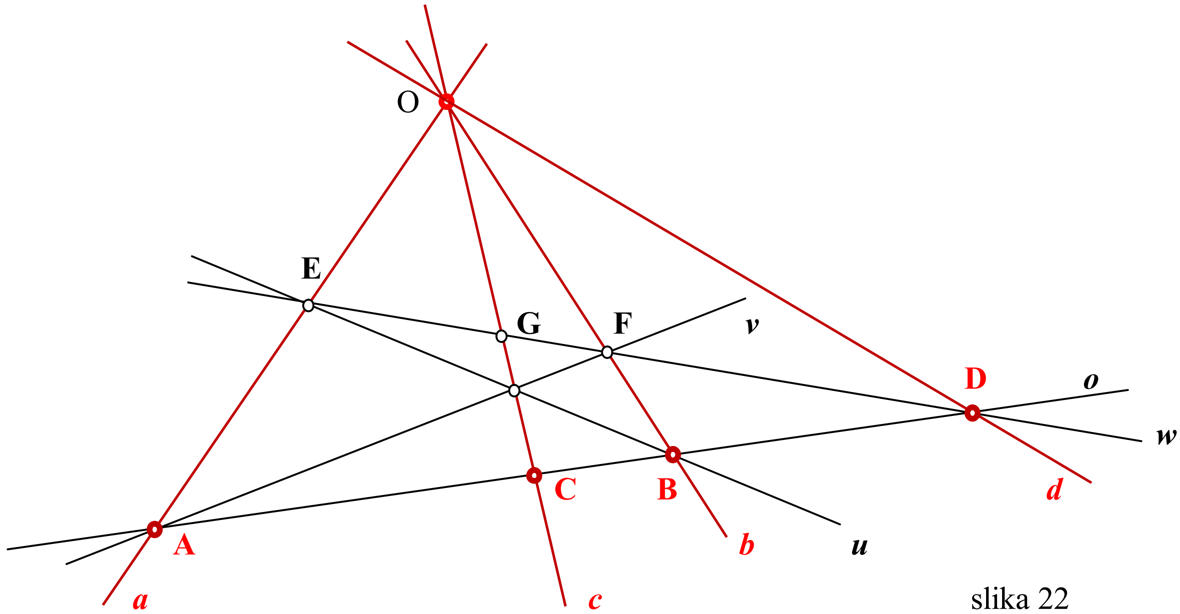


slika 21

Budući da se konsrukcija H(ab, cd) harmoničke četvorke konkurentnih pravaca provodi dualno konstrukciji H(AB, CD) harmoničke četvorke kolinearnih točaka imamo da sve dualne tvrdnje onim za harmoničku četvorku točaka vrijede i za harmoničku četvorku pravaca (stoga ih nećemo ponovo dokazivati – dokaz za vježbu).

Promatrajmo sliku 20, tj. 21 (koje ćemo ponovo prikazati slikom 22) i označimo na njima sa A, B, C i D sjecišta harmoničke četvorke konkurentnih pravaca a, b, c i d s pravem o.

Tada primjenom definicije 5.1 lako se može vidjeti da vrijedi H(AB, CD), tj. da tako dobivene točke A, B, C i D čine harmoničku četvorku kolinearnih točaka.



slika 22

Kako su H(AB, CD) i H(ab, cd) međusobno dualne lako se vidi da vrijedi:

- spojnice a, b, c i d točaka neke harmoničke četvorke kolinearnih točaka H(AB, CD) s nekom točkom O čine harmoničku četvorku konkurentnih pravaca H(ab, cd) i obratno
- presječne točke A, B, C i D pravaca neke harmoničke četvorke konkruentnih pravaca H(ab, cd) s nekim pravcem o čine harmoničku četvorku kolinearnih točaka H(AB, CD).

Na slici 22 imamo harmoničku četvorku konkurentnih pravaca H(ab, cd).
Uočimo da pravac o, ali isto tako i pravac w ne prolazi vrhom pramena te harmoničke četvorke pravaca te da oni sijeku pravce a, b, c i d (harmoničke četvorke pravaca) u točkama A, B, C i D, odnosno u točkama E, F, G i D.
Dakle iz H(ab, cd) na pravcu o prizlazi H(AB, CD), odnosno na pravcu w proizlazi H(EF, GD).

Komentar 5.7

- presječemo li harmoničku četvorku pravaca H(ab, cd) sa dva različita pravca p_1 i p_2 koji ne prolaze točkom O, tj. vrhom pramena harmoničke četvorke pravaca, tada njihova sjecišta A_1, B_1, C_1, D_1 i A_2, B_2, C_2, D_2 s pravcima harmoničke četvorke čine dvije harmoničke četvorke kolinearnih točaka $H(A_1B_1, C_1D_1)$ i $H(A_2B_2, C_2D_2)$.

Teorem 5.8

Harmonitet četvorke kolinearnih točaka (tj. konkurentnih pravaca) invarijanta je perspektiviteta. Ako je $H(A_1B_1, C_1D_1)$ i ako je $A_1, B_1, C_1, D_1 \overset{=}{\wedge} A_2, B_2, C_2, D_2$, onda je $H(A_2B_2, C_2D_2)$.

Teorem 5.8 direktno proizlazi iz komentara 5.7 i definicije (4.1) perspektiviteta dva niza točaka.

Napomenimo da postoje projektivne ravnine u kojima su dijagonalne točke potpunog četverovrha kolinearne točke (iako su općenito to nekolinearne točke). Da bi se u nastavku isključile takve projektivne ravnine, a samim time da bismo si osigurali postojanje harmoničkih četvorki točaka, dodaje se sljedeći aksiom, koji se još naziva i Fanov aksiom.

Aksiom A8 **(Fano-v aksiom)**

Dijagonalne točke svakog potpunog četverovrha su nekolinearne točke.