3. Figure projektivne ravnine i projektivnog prostora

Figure projektivne ravnine sastoje se od nekog broja točaka i pravaca, dok se figure projektivnog prostora sastoje od nekog broja točaka, pravaca i ravnina.

Definicija 3.1

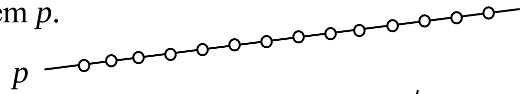
Bilo koji skup komplanarnih točaka i pravaca zvati ćemo ***ravninskom figurom***.

Bilo koji skup točaka, pravaca i ravnina u projektivnom prostoru zvati ćemo ***prostornom figurom*** projektivnog prostora.

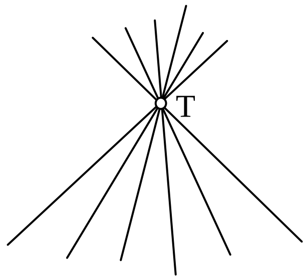
Neke figure imaju temeljnu ulogu u izgradnji projektivne geometrije ravnine i prostora, stoga ih zovemo ***temeljnim figurama projektivne geometrije***.

Razlikujemo slijedeće temeljne figure projektivne geometrije:

- ***Niz točaka*** čine sve točke incidentne s nekim pravcem p.



Niz točaka na pravcu p označavamo sa (p).
Pravac p zovemo nosiocem niza točaka (p).



- ***Pramen*** pravaca čine svi pravci neke ravnine α, koji prolaze jednom točkom T te ravnine.

Ako ravninu α promatramo kao operativni prostor, onda pramen pravaca kroz točku T označavamo (T), a točku T zovemo nosiocem ili vrhom pramena (T).
Ako promatramo ravninu α u operativnom trodimenzionalnom projektivnom prostoru, onda uz točku T i ravnina α ima ulogu nosioca pramena (T).

- ***Svezak ravnina*** čine sve ravnine prostora, koje prolaze jednim pravcem p.
  Pravac p zovemo osi sveska ravnina.

- ***Polje točaka*** čine sve točke koje leže u jednoj ravnini α. Tu ravninu α zovemo nosiocem tog polja točaka.

- ***Polje pravaca*** čine svi pravci koji leže u jednoj ravnini α. Tu ravninu α zovemo nosiocem tog polja pravaca.

- ***Snop ravnina*** čine sve ravnine prostora koje prolaze jednom točkom T. Tu točku T zovemo vrhom snopa ravnina.

- ***Snop pravaca*** čine svi pravci prostora koji prolaze jednom točkom T. Tu točku T zovemo vrhom tog snopa pravaca.

Uzimajući u obzir dualnost (vidi odjeljak 1.3) lako se može uočiti da su neke temeljne figure međusobno dualne. Konkretno, ako projektivnu ravninu promatramo kao operativni prostor, onda dualne figure u parovima su:

niz točaka i pramen pravaca, ali isto tako i polje točaka i polje pravaca.

S druge strane prostorno dualne figure u parovima su:

niz točaka i svezak ravnina,

polje točaka i snop ravnina,

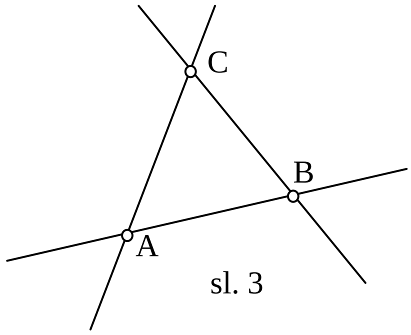
polje pravaca i snop pravaca.

Osim temeljnih figura, često se razmatraju još neke figure, koje ćemo u nastavku detaljnije opisati.

Razlikujemo:

- ***Trovrh*** je ravninska figura koja se sastoji od tri nekolinearne točke A, B i C i njihovih spojnica AB, BC i CA.

  Podsjetimo se, dualizacijom definicije trovrha dobiva se ***trostran*** (sastoji se od tri nekonkurentna pravca i njihovih sjecišta), koji je dualno invarijantna figura trovrhu.

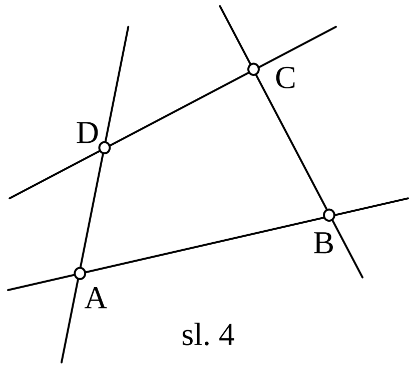


sl. 3

- ***Obični četverovrh*** je ravninska figura koja se sastoji od četiri komplanarnih točaka A, B, C i D (od kojih po tri susjedne nisu kolinearne) i četiri spojnica AB, BC, CD i DA po dviju susjednih točaka u danom poretku.

  Pritom se četvorka ABCD promatra ciklički, tj. prvu i posljednju točku smatramo susjednim točkama, a cikličku permutaciju ne smatramo novim redoslijedom.

  Točke A, B, C i D zovemo vrhovima, a spojnice (pravce) AB, BC, CD i DA zovemo spojnicama (pravcima) običnog četverovrha ABCD.



sl. 4

Konkretno, ako obični četverovrh CDAB dobijemo cikličkom premutacijom običnog četverovrha ABCD (prikazanog na slici 4), onda imamo jedan te isti obični četverovrh. Razlika je u tome da je točka C početna točka četverovrha CDAB za raliku od istog četverovrha ABCD, gdje je A početna točka.

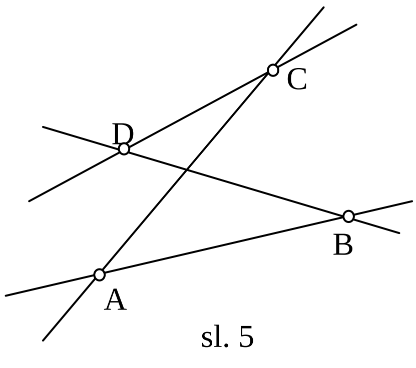
VAŽNO: Kod običnih četverovrha je važan redoslijed danih vrhova.

Promatramo li iste četiri komplanarne točke A, B, C i D dane na slici 4, ali tako da one nisu dane u redoslijedu cikličke permutacije od ABCD.

Konkretno, uzmimo redoslijed točaka A, C, D, B.

Tada dobivamo obični četverovrh ACDB (vidi sliku 5), tj. figuru koja se sastoji od:

- četiri komplanarnih točaka A, C, D i B i
- četiri pravaca (spojnica) AC, CD, DB i BA.



sl. 5

Napomenimo, sjecište dviju stranica, koje nisu susjedne nije točka figure.

Konkretno, na slici 5 imamo da postoji sjecište spojnica AC i DB. Međutim, spojnice AC i DB nisu susjedne stranice običnog četverovrha ACDB, stoga sjecište spojnica AC i DB nije točka običnog četverovrha ACDB.

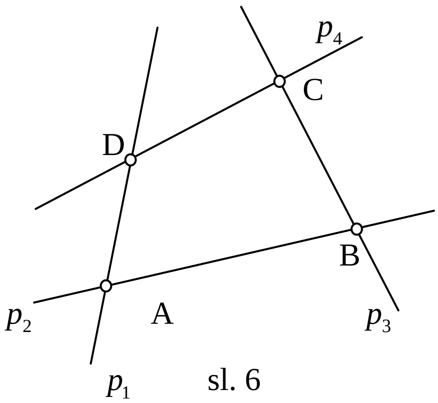
Analogno, spojnica dviju nesusjednih točaka nije pravac figure.

S obzirom na rečeno, lako se vidi da spojnice AC i BD nisu pravci običnog četverovrha ABCD, prikazanog na slici 4, jer AC, a isto tako i BD nije spojnica susjednih vrhova tog četverovrha.

Također, lako se vidi da spojnice AD i CB nisu pravci običnog četverovrha ACDB, prikazanog na slici 5.

Dualizacijom definicije običnog četverovrha dobiva se dualno invarijantna figura, koja se naziva obični četverostran.

- Dakle obični četverostran je ravninska figura koja se sastoji od četiri komplanarna pravca p_1, p_2, p_3 i p_4 (od kojih po tri susjedna nisu konkurentna) i od četiri sjecišta po dvaju susjednih pravaca u danom poretku.



sl. 6

Definicija 3.2

Ravninsku figuru koja se sastoji od n komplanarnih točaka u određenom redoslijedu, od kojih po tri susjedne nisu kolinearne i od n spojnica (pravaca) po dviju susjednih točaka zovemo ***običnim n-terovrhom*** projektivne ravnine.

Dane točke zovemo vrhovima, a njihove spojnice stranicama tog n-terovrha.

Redoslijed točaka se promatra ciklički, tj. posljednja i prva točka u danom redoslijedu su također susjedne točke.

Dualizacijom definicije 3.2 proizlazi:

Definicija 3.3

Ravninsku figuru koja se sastoji od n komplanarnih pravaca u određenom redoslijedu, od kojih po tri susjedne nisu konkurentna i od n sjecišta (točaka) po dvaju susjednih pravaca zovemo ***običnim n-terostranom*** projektivne ravnine.

Dane pravce zovemo stranicama, a spomenuta sjecišta vrhovima tog n-terostrana.

Redoslijed pravaca se promatra ciklički, tj. posljednji i prvi pravac u danom redoslijedu su također susjedni pravci.

Lako se može primijetiti da su obični n-terovrh i obični n-terostran dualne figure.

Napomenimo da se izraz obični n-terovrh ili obični n-terostran upotrebljava utoliko da bi se naglasilo od kojih se elemenata polazi (točaka pa pravaca ili obrnuto).

Osim običnog n-terovrha i običnog n-terostrana razlikujemo još i potpuni n-terovrh i potpuni n-terostran. Iz definicija koje slijede vidjeti ćemo da su ove dvije figure (potpuni n-terovrh i potpuni n-terostran) dualne figure.

Definicija 3.4

Ravninsku figuru koja se sastoji od n komplanarnih točaka od kojih po tri nisu kolinearne i od svih $\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ spojnica (pravaca) po dvije od tih točaka zovemo ***potpunim n-terovrhom*** projektivne ravnine.

Danih n točaka zovemo <u>vrhovima</u>, a njihove spojnice <u>stranicama</u> tog n-terovrha.

Dualizacijom definicije 3.4 proizlazi:

Definicija 3.5

Ravninsku figuru koja se sastoji od n komplanarnih pravaca od kojih po tri nisu konkurentna i od svih $\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ sjecišta (točaka) po dvaju od tih pravaca zovemo ***potpunim n-terostranom*** projektivne ravnine.

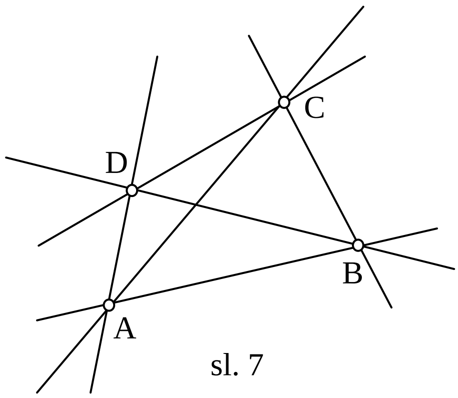
Danih n pravaca zovemo <u>stranicama</u>, a njihova sjecišta <u>vrhovima</u> tog n-terostrana.

Primjer 3.6

Primjenom definicija 3.4 i 3.5 prikažimo potpuni četverovrh i potpuni četverostran.

Primjenom definicije 3.4 imamo da je ***potpuni četverovrh*** ravninska figura koja se sastoji od četiri komplanarne točke A, B, C i D (od kojih po tri susjedne nisu kolinearne) i od svih $\binom{4}{2}=6$ spojnica (pravaca) AB, AC, AD, BC, BD i CD po dviju od danih četiri točaka (vidi sl. 7).

Točke A, B, C i D zovemo <u>vrhovima</u>, a spojnice (pravce) AB, AC, AD, BC, BD i CD zovemo <u>stranicama potpunog četverovrha</u> ABCD.



sl. 7

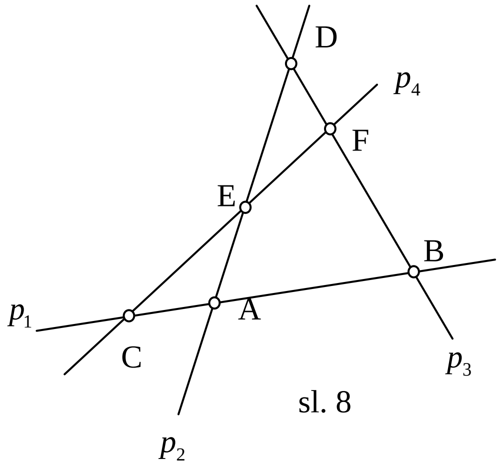
Primijetimo da sjecište spojnica AC i BD nije točka, tj. vrh potpunog četverovrha ABCD.

Isto tako sjecište spojnica AD i BC, ali i sjecište spojnica AB i CD nisu točke, tj. vrhovi potpunog četverovrha ABCD.

Primjenom definicije 3.5 imamo da je ***potpuni četverostran*** ravninska figura koja se sastoji od četiri komplanarna pravca p_1, p_2, p_3 i p_4 (od kojih po tri susjedne nisu konkurentna) i od svih $\binom{4}{2}=6$ sjecišta (točaka):

$$p_1\cap p_2=\mathrm{A},\quad p_1\cap p_3=\mathrm{B},\quad p_1\cap p_4=\mathrm{C},$$
$$p_2\cap p_3=\mathrm{D},\quad p_2\cap p_4=\mathrm{E},\quad p_3\cap p_4=\mathrm{F}.$$

Pravce p_1, p_2, p_3 i p_4 zovemo <u>stranicama</u>, a točke A, B, C, D, E i F zovemo <u>vrhovima potpunog četverostrana</u> $p_1p_2p_3p_4$.



sl. 8