2. Analitički model realne projektivne ravnine

- omogućava nam razmatranje projektivne ravnine analitičkom metodom.

Definicija 2.1

Klasa uređenih trojki realnih brojeva $\lambda \cdot (x_0, x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_0, \lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, osim trojke $(0,0,0)$ naziva se ***točka realne projektivne ravnine***.

Relne brojeve x_0, x_1, x_2 nazivamo homogenim koordinatama točke.

Dvije uređene trojke realnih brojeva (x_0, x_1, x_2) i (y_0, y_1, y_2) predstavljaju istu točku ako pripadaju istoj klasi, tj. ako i samo ako postoji realan broj $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $x_\text{i} = \lambda \cdot y_\text{i}$, $\text{i} = 0,1,2$.

Uočimo da trojke $(1,3,-6)$, $(-3,-9,18)$ predstavljaju istu točku, jer su njihove odgovarajuće koordinate proporcionalne.

U nastavku će se točka A zadana koordinatnom trojkom (a_0, a_1, a_2) označavati sa $\text{A}(a_0, a_1, a_2)$.

Definicija 2.2

Klasa uređenih trojki realnih brojeva $\mu \cdot [u_0, u_1, u_2] = [\mu \cdot u_0, \mu \cdot u_1, \mu \cdot u_2]$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, osim trojke $[0,0,0]$ naziva se ***pravac realne projektivne ravnine***.

Relni brojevi u_0, u_1, u_2 se nazivaju homogenim koordinatama pravca.

Dvije uređene trojke realnih brojeva $[u_0, u_1, u_2]$ i $[v_0, v_1, v_2]$ predstavljaju isti pravac ako pripadaju istoj klasi, tj. ako i samo ako postoji realan broj $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $u_\text{i} = \mu \cdot v_\text{i}$, $\text{i} = 0,1,2$.

Uočimo da trojke $[-2,5,11]$ i $[4,-10,-22]$ predstavljaju isti pravac.

U nastavku će se trojka koordinata pravca (u projektivnoj ravnini) uvijek označavati uglatim zagradama, za razliku od trojke koordinata točke, koja se označava okruglim zagradama.

Također će se pravac p zadan koordinatnom trojkom $[p_0, p_1, p_2]$ označavati sa $p[p_0, p_1, p_2]$.

Definicija 2.3

Relacija incidencije se definira na sljedeći način:

Točka (x_0, x_1, x_2) ***i pravac*** $[u_0, u_1, u_2]$ ***su incidentni*** ako i samo ako vrijedi:

$$\boxed{u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 = 0}\ .$$

Ovako definirani skup točaka, pravaca i relacije incidencije tvoriti će projektivnu ravninu ako pokažemo da vrijede aksiomi A1-A5.

Aksiom A1: Postoje najmanje dvije različite točke.

Dovoljno je pronaći dvije uređene trojke realnih brojeva različite od $(0,0,0)$ koje ne pripadaju istoj klasi. Primjer takvih dviju trojki su: $(1,0,0)$ i $(0,1,0)$. Lako se vidi da ne postoji realan broj $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $1 = \lambda \cdot 0$, (tj. njihove odgovarajuće koordinate nisu proporcionalne), čime je potvrđeno da trojke $(1,0,0)$ i $(0,1,0)$ predstavljaju dvije različite točke.

Aksiom A2: Postoji točno jedan pravac incidentan s dvije različite točke.

Pretpostavimo da su $\mathrm{A}(a_0,a_1,a_2)$ i $\mathrm{B}(b_0,b_1,b_2)$ bilo koje dvije različite točke.

Tada prema definiciji 2.1 zaključujemo da njihove odgovarajuće koordinate nisu proporcionalne, tj. za svaki $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ vrijedi $a_\mathrm{i} \neq \lambda \cdot b_\mathrm{i}$, $\mathrm{i}=0,1,2$.

Tražimo uređenu trojku $[u_0,u_1,u_2]$ koja će predstavljati pravac incidentan s točkama A i B.

Koristeći definiciju 2.3 zaključujemo da mora vrijediti:

$$u_0 \cdot a_0 + u_1 \cdot a_1 + u_2 \cdot a_2 = 0$$
$$u_0 \cdot b_0 + u_1 \cdot b_1 + u_2 \cdot b_2 = 0$$

čime se dobiva sustav (od dviju homogenih jednadžbi s tri nepoznanice u_0,u_1,u_2), koji ima netrivijalno rješenje:

$$u_0 : u_1 : u_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} .$$

Napomenimo da je i svaka trojka oblika $\mu \cdot u_0, \mu \cdot u_1, \mu \cdot u_2$ također rješenje toga sustava.
Imajući na umu da trojke $[u_0,u_1,u_2]$ i $[\mu \cdot u_0, \mu \cdot u_1, \mu \cdot u_2]$, $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, obje različite od $(0,0,0)$, pripadaju istoj klasi, imamo da one predstavljaju isti pravac, tj. spojnicu AB, stoga kao predstavnika te klase možemo uzeti

$$[u_0,u_1,u_2] = \left[\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \right] \tag{1}$$

Dakle, relacijom (1) su dane koordinate pravca incidentnog s dvijema različitim točkama $\mathrm{A}(a_0,a_1,a_2)$ i $\mathrm{B}(b_0,b_1,b_2)$.
Dokažimo da je $[u_0,u_1,u_2] \neq [0,0,0]$.
Pretpostavimo suprotno, tj. da je $[u_0,u_1,u_2] = [0,0,0]$. Tada primjenom relacije (1) dobivamo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 , \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} = 0 , \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

odnosno: $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, $a_2 b_0 - a_0 b_2 = 0$, $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$,

odakle proizlazi $\dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$ ili $a_\mathrm{i} = \mu b_\mathrm{i}$, $\mathrm{i}=0,1,2$,

što je u kontradikciji s pretpostavkom da su $\mathrm{A}(a_0,a_1,a_2)$ i $\mathrm{B}(b_0,b_1,b_2)$ međusobno različite točke.
Time zaključujemo da je $[u_0,u_1,u_2] \neq [0,0,0]$.

Aksiom A3: Ako su A i B dvije različite točke, onda postoji barem jedna točka C različita od A i B, koja je incidentna s pravcem AB.

Pretpostavimo da su $\mathrm{A}(a_0,a_1,a_2)$ i $\mathrm{B}(b_0,b_1,b_2)$ bilo koje dvije različite točke, tj. $a_\mathrm{i} \neq \lambda \cdot b_\mathrm{i}$, $\mathrm{i}=0,1,2$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tada je točka $\mathrm{C}(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2)$ različita od A i B. Dokažimo da je ona ujedno i kolinearna s točkama A i B.

Relacijom (1), koja se može pisati u obliku

$$[u_0,u_1,u_2]=[a_1b_2-a_2b_1,a_2b_0-a_0b_2,a_0b_1-a_1b_0] \tag{2}$$

dane su koordinate pravca AB, gdje su $A(a_0,a_1,a_2)$ i $B(b_0,b_1,b_2)$ različite točke.

Nadalje, uzimajući u obzir definiciju 2.3 imamo da je točka $C(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2)$ incidentna s pravcem AB ako i samo ako vrijedi:

$$u_0\cdot(a_0+b_0)+u_1\cdot(a_1+b_1)+u_2\cdot(a_2+b_2)=0$$

odnosno

$$(a_1b_2-a_2b_1)\cdot(a_0+b_0)+(a_2b_0-a_0b_2)\cdot(a_1+b_1)+(a_0b_1-a_1b_0)\cdot(a_2+b_2)=0$$

odakle dobivamo

$$a_1b_2a_0-a_2b_1a_0+a_1b_2b_0-a_2b_1b_0+a_2b_0a_1-a_0b_2a_1+a_2b_0b_1-a_0b_2b_1+a_0b_1a_2-a_1b_0a_2+a_0b_1b_2-a_1b_0b_2=0$$

tj. $0=0$, čime je dokazano da je točka C leži na pravcu AB.

Aksiom A4: Ako su A i B dvije različite točke, onda postoji barem jedna točka koja nije incidentna s pravcem AB.

Neka su $A(a_0,a_1,a_2)$ i $B(b_0,b_1,b_2)$ bilo koje dvije različite točke, tj. $a_i\neq\lambda\cdot b_i$, $i=0,1,2$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tada je jednadžba spojnice AB (tj. pravca AB) dana sa:

$$u_0\cdot x_0+u_1\cdot x_1+u_2\cdot x_2=0 \tag{3}$$

gdje svaka točka (x_0,x_1,x_2) leži na pravcu AB.

Jasno, sve točke (y_0,y_1,y_2) takve da je $u_0\cdot y_0+u_1\cdot y_1+u_2\cdot y_2\neq 0$ imaju svojstvo da ne leže na pravcu AB, tj. da nisu incidentne s pravcem AB. Primjer takve točke je (u_0,u_1,u_2), gdje smo u_0,u_1,u_2, tj. homogene koordinate pravca promatrali kao homogene koordinate neke točke.

Sada se lako može vidjeti da točka (u_0,u_1,u_2) i pravac $[u_0,u_1,u_2]$ nisu incidentni, jer je:

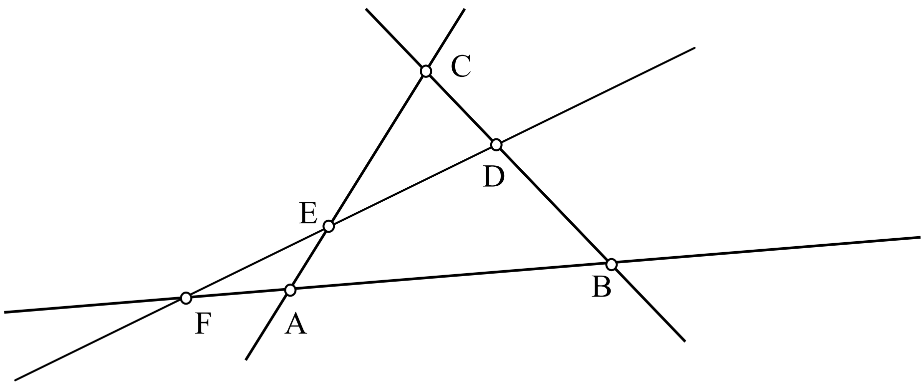
$$u_0\cdot u_0+u_1\cdot u_1+u_2\cdot u_2\neq 0\,,$$

što potvrđuje aksiom A4.

Aksiom A5: Ako su A, B i C tri nekolinearne točke i ako vrijedi:

- ✓ točka D (različita od točaka B i C) je na spojnici BC,
- ✓ točka E (različita od točaka C i A) je na spojnici CA,

onda postoji točka F (različita od točaka A i B) na spojnici AB, takva da su točke D, E i F kolinearne točke.



Podsjetimo se, posljedica aksioma A5 je da se svaka dva različita pravca u projektivnoj ravnini sijeku (teorem 1.1.2), stoga je dovoljno odrediti sjecište pravaca AB i ED i pokazati da je to sjecište različito od $(0,0,0)$.

Napomenimo da se s obzirom na prethodno rečeno lako može pokazati da za proizvoljne tri nekolinearne točke A, B i C imamo jednadžbe spojnica (pravaca) AB, AC i BC, ali isto tako i koordinate točaka D i E, a samim time i jednadžbu spojnice (pravca) DE.

Dakle pretpostavimo da su u_0, u_1, u_2 homogene koordinate pravca AB te da su v_0, v_1, v_2 homogene koordinate pravca DE.

Drugim rječima, neka su $[u_0, u_1, u_2]$ i $[v_0, v_1, v_2]$ bilo koja dva različita pravca.

Prema definiciji 2.2 zaključujemo da njihove odgovarajuće koordinate nisu proporcionalne, tj. za svaki $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi $u_i \neq \mu \cdot v_i$, $i = 0,1,2$.

Tražimo uređenu trojku (x_0, x_1, x_2) koja će predstavljati točku (sjecište) incidentnu s pravcima $[u_0, u_1, u_2]$ i $[v_0, v_1, v_2]$. Primjenom definicije 2.3 zaključujemo da mora vrijediti:

$$\begin{aligned} u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 &= 0 \\ v_0 \cdot x_0 + v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 &= 0 \end{aligned}$$

čime se dobiva sustav (od dviju homogenih jednadžbi s tri nepoznanice x_0, x_1, x_2), koji ima netrivijalno rješenje:

$$x_0 : x_1 : x_2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_2 & u_0 \\ v_2 & v_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{vmatrix} .$$

Napomenimo da je i svaka trojka oblika $\lambda \cdot x_0, \lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2$ također rješenje toga sustava.
Imajući na umu da trojke $[x_0, x_1, x_2]$ i $[\lambda \cdot x_0, \lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2]$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, obje različite od $(0,0,0)$, pripadaju istoj klasi, imamo da one predstavljaju istu točku, tj. sjecište danih pravaca $[u_0, u_1, u_2]$ i $[v_0, v_1, v_2]$. Time se za predstavnika te klase može uzeti

$$(x_0, x_1, x_2) = \left(\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_2 & u_0 \\ v_2 & v_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{vmatrix} \right) \tag{4}$$

Relacijom (4) su dane koordinate sječišta dva (različita) pravca $[u_0, u_1, u_2]$ i $[v_0, v_1, v_2]$.
Lako se može pokazati da iz $[u_0, u_1, u_2] \neq \mu \cdot [v_0, v_1, v_2]$ proizlazi $(x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)$.
Dokaz je analogan razmatranjima u aksiomu A2 (dualna tvrdnja).

Pokazali smo da s obzirom na definicije 2.1-2.3 vrijede aksiomi A1-A5, stoga se realna projektivna ravnina može proučavati na temelju analitičkog modela (uvedenog definicijama 2.1-2.3).

Komentar 2.4

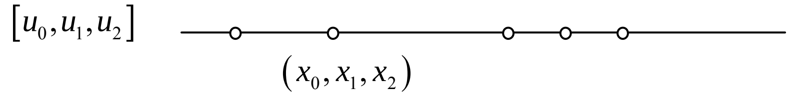
Resumirajmo:

- točku A zadanu koordinatnom trojkom (a_0, a_1, a_2) označavati ćemo sa $A(a_0, a_1, a_2)$ te će se analogno pravac p zadan koordinatnom trojkom $[p_0, p_1, p_2]$ označavati sa $p[p_0, p_1, p_2]$.

Pritom je jednadžbom $$\boxed{u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 = 0}. \qquad (5)$$

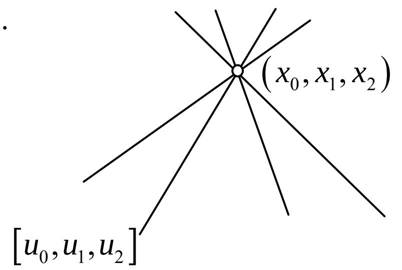
dana relacija incidencije točke (x_0, x_1, x_2) i pravca $[u_0, u_1, u_2]$.

Ako su x_0, x_1, x_2 (homogene koordinate točke) varijabilne, a u_0, u_1, u_2 (homogene koordinate pravca) konstantne, onda kažemo da je (5) ***točkovna jednadžba pravca***. U ovom slučaju sve točke (x_0, x_1, x_2) čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu (5) čine niz točaka na pravcu $[u_0, u_1, u_2]$.



x_0, x_1, x_2 varijabilne,
u_0, u_1, u_2 konstantne.

Analogno, ako su x_0, x_1, x_2 (homogene koordinate točke) konstantne, a u_0, u_1, u_2 (homogene koordinate pravca) varijabilne, onda kažemo da je (5) ***pravčasta jednadžba točke***. U ovom slučaju svi pravci $[u_0, u_1, u_2]$ čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu (5) čine pramen pravaca s vrhom u točki (x_0, x_1, x_2).

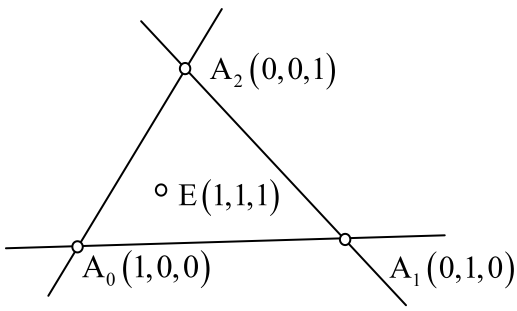


x_0, x_1, x_2 konstantne,
u_0, u_1, u_2 varijabilne.

Definicija 2.5

Točke $\mathrm{A}_0(1,0,0)$, $\mathrm{A}_1(0,1,0)$ i $\mathrm{A}_2(0,0,1)$ zovemo ***vrhovima osnovnog ili koordinatnog trovrha***, a točku $\mathrm{E}(1,1,1)$ ***jediničnom točkom projektivnog koordinatnog sustava ravnine.***

Od te četiri točke nikoje tri nisu kolinearne.



Teorem 2.6

Jednadžba spojnice dviju različitih točaka $\mathrm{A}(a_0, a_1, a_2)$ i $\mathrm{B}(b_0, b_1, b_2)$ može se pisati u obliku:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Pritom svaka (varijabilna) točka (x_0, x_1, x_2) koja leži na spojnici (pravcu) AB mora zadovoljavati jednadžbu (6).

Dokaz teorema direktno slijedi iz gore provedenih razmatranja.

Naime, relacijom (1), tj. (2) pokazali smo da su homogene koordinate pravca AB dane sa

$$[u_0,u_1,u_2]=\left[\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}\right], \text{ tj. } [u_0,u_1,u_2]=[a_1b_2-a_2b_1, a_2b_0-a_0b_2, a_0b_1-a_1b_0],$$

stoga se primjenom jednadžbe (5) jednadžba pravca AB (točkovna jednadžba pravca) može pisati u obliku:

$$\underbrace{(a_1b_2-a_2b_1)}_{=u_0}\cdot x_0+\underbrace{(a_2b_0-a_0b_2)}_{=u_1}\cdot x_1+\underbrace{(a_0b_1-a_1b_0)}_{=u_2}\cdot x_2=0. \tag{7}$$

Lako se vidi da su (6) i (7) iste jednadžbe.

Iz teorema 2.6 direktno proizlazi sljedeći korolar.

Korolar 2.7

Tri različite točke $A(a_0,a_1,a_2)$, $B(b_0,b_1,b_2)$ i $C(c_0,c_1,c_2)$ projektivne ravnine su *kolinearne* ako i samo ako vrijedi:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Dualnim razmatranjima imamo da se teorem 2.6 i korolar 2.7 iskazuju:

- Jednadžba sjecišta dvaju različitih pravaca $p[p_0,p_1,p_2]$ i $q[q_0,q_1,q_2]$ može se pisati u obliku:

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

Pritom svaki (varijabilan) pravac $[u_0,u_1,u_2]$ koji prolazi danim sjecištem mora zadovoljavati jednadžbu (9). Drugim rječima, jednadžba (9) je ujedno pravčasta jednadžba točke.

- Tri različita pravca $p[p_0,p_1,p_2]$, $q[q_0,q_1,q_2]$ i $r[r_0,r_1,r_2]$ projektivne ravnine su *konkurentna* ako i samo ako vrijedi:

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Teorem 2.8

Neka su $A(a_0,a_1,a_2)$ i $B(b_0,b_1,b_2)$ dvije različite točke projektivne ravnine.
Točka $T(t_0,t_1,t_2)$ je *kolinearna* s točkama A i B ako i samo ako vrijedi:

$$\boxed{t_i=\lambda_0\cdot a_i+\lambda_1\cdot b_i}, \quad i=0,1,2, \tag{11}$$

gdje su λ_0,λ_1 realni brojevi, koji istovremeno nisu jednaki nuli.

Dokaz: sami – vidi udžbenik, str. 84.