1.3 Dualnost

Neka je projektivna ravnina kao operativni prostor dan aksiomima A1 – A5. Tada sve točke leže u projektivnoj ravnini (tj. sve točke su iz skupa P^2).

PRINCIP DUALNOSTI PROJEKTIVNE RAVNINE

Zamijenimo li u nekoj valjanoj izreci (teoremu) projektivne geometrije ravnine pojam točke s dualnim pojmom pravac ili obrnuto, a pojam incidencije ostavimo nepromijenjen, tada ponovo dobivamo neku valjanu izreku (teorem) projektivne geometrije ravnine.

Za takve dvije izreke kažemo da su *dualne jedna drugoj*.

Konkretno, lako se može vidjeti da je aksiom A2 dualan teoremu 1.1.2:

A2: postoji točno jedan pravac incidentan s dvije različite točke.

Th 1.1.2: postoji točno jedna točka incidentna s dva različita pravca.

(ili "dva različita pravca projektivne ravnine sijeku se u točno jednoj točki").

Napomenimo, ako umjesto pojma incidencije koristimo izraze, "prolazi kroz", "leži na", "sijeku se" ili "spajaju", onda se dualne tvrdnje dobivaju zamjenom riječi prema sljedećoj shemi:

točka ↔ pravac

incidencija

prolazi kroz ↔ leži na

sijeku se ↔ spajaju

Uočimo teorem: dva različita pravca projektivne ravnine sijeku se u točno jednoj točki

dualan je izreci: dvije različite točke projektivne ravnine spajaju točno jedan pravac.

Osim dualnih izreka, tj. teorema u projektivnoj ravnini postoje figure koje su same sebi dualne.

Primjer takve figure je trovrh, tj. trostran.

Podsjetimo se, prethodno smo definirali trovrh kao figuru projektivne ravnine koja se sastoji od tri nekolinearne točke i od njihovih spojnica. Dualizacijom te definicije dobiva se figura, koja se sastoji od tri nekonkurentna pravca i njihovih sjecišta te se naziva trostran.

Očito su trostran i trovrh iste figure (samo se u njihovim definicijama polazi od međusobno dualnih pojmova).

Dakle, imamo da je trovrh (trostran) sam sebi dualna figura projektivne ravnine.

Takve figure nazivamo ***dualno invarijantne figure***.

Slična razmatranja se provode i u projektivnom prostoru.

Promatrajmo sada projektivni prostor kao operativni prostor zajedno sa aksiomima A1 – A6.
Jasno, u ovom slučaju se podrazumijeva da sve točke leže u projektivnom prostoru, tj. da su sve točke iz skupa P^3.

PRINCIP DUALNOSTI PROJEKTIVNOG PROSTORA

Zamijenimo li u nekoj valjanoj izreci (teoremu) projektivne geometrije prostora pojam točke s dualnim pojmom ravnina ili obrnuto, a pojmove pravac i incidencije ostavimo nepromijenjenima, tada ponovo dobivamo neku valjanu izreku (teorem) projektivne geometrije prostora.

Za takve dvije izreke kažemo da su *dualne jedna drugoj*.

Konkretno, lako se može vidjeti da je aksiom A2 (postoji točno jedan pravac incidentan s dvije različite točke) dualan sljedećoj izreci:

postoji točno jedan pravac incidentan s dvije različite ravnine,

što češće iskazujemo sa:

"postoji točno jedan pravac, koji leži u dvije različite ravnine"

ili "dvije različite ravnine sijeku se u točno jednom pravcu" (teorem 1.2.6).

Analogno gore navedenom imamo da se dualne tvrdnje dobivaju zamjenom riječi prema shemi:

točka ↔ ravnina

pravac

incidencija

prolazi kroz ↔ leži na

sijeku se ↔ spajaju

Primjenom principa dualnosti, često se dokazi raznih teorema uvelike pojednostavljuju.