Projektivna geometrija

Literatura: Dominik Palman: Projektivna geometrija, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

Motivacija: postavlja se pitanje da li je moguće izgraditi geometriju u kojoj nema metrike, tj. u kojoj nema udaljenosti, kuteva, ali isto tako ni paralelnosti.

Odgovor je potvrdan.

Naime, pokazuje se da je projektivna geometrija složen sustav propozicija (jednostavniji od Euklidovog), koji se bavi točkama, pravcima i ravninama.

Intiutivno je projektivna geometrija slična euklidskoj geometriji, ali ne u pojedinostima.

Za razliku od euklidske geometrije, gdje razne figure uspoređujemo mjerenjem, u projektivnoj geometriji ne može se mijeriti (konkretno, udaljenost između dviju točaka; udaljenost između točke i pravca; kut između dva pravca, itd.), stoga se u projektivnoj geometriji uvodi perspektivitet, a potom i projektivitet, kojim se jedan skup točaka pridružuje drugom.

U projektivnoj geometriji se sve konstrukcije izvode samo pomoću ravnala, za razliku od euklidske geometrije u kojoj se konstrukcije izvode pomoću ravnala i šestara.

Pritom se u projektivnoj geometriji pravac promatra kao spojnica dviju točaka, a točka kao sjecište dvaju pravaca te se bilo koja dva pravca uvijek sijeku.

Drugim riječima, u projektivnoj geometriji ne postoje takva dva pravca koja bi bila paralelna.

Komentar:

- ako pogledamo u smjeru željezničkih tračnica, onda se dobiva dojam kao da se dvije paralelne tračnice sijeku na horizontu;
- ako slikamo popločen pod na vertikalno postavljeno platno, onda kvadratne pločice na platnu neće biti kvadratne, jer se stranice i kutevi tih kvadrata izobličuju te se dobiva dojam kao da se prvci nosioci nasuprotnih stranica kvadratnih pločica sijeku u nekoj "dalekoj točki".

Važno:

- u projektivnoj geometriji se bilo koja dva pravca uvijek sijeku.

U nastavku će se pokazati da projektivnu ravninu definiraju dva skupa (skup točaka i skup pravaca) i relacija incidencije (pripadnosti) među elementima ta dva skupa.

Također će se pokazati da u projektivnoj ravnini ne postoji pojam pravokutnog, jednakostraničnog ili jednakokračnog trokuta, već samo pojam trokuta, koji se zapravo naziva trovrh (ili dualno trostran). Analogno, u projektivnoj ravnini ne postoji pojam pravokutnika, paralelograma, kvadrata, romba, trapeza, već samo pojam četverokuta, koji se naziva četverovrh (ili dualno četverostran). Općenito se u projektivnoj ravnini govori o n-terovrhu ili n-terostrnu (više u odjeljku: Figure projektivne ravnine i projektivnog prostora).

Napomenimo da se u projektivnoj geometriji ne razlikuje kružnica, elipsa, hiperbola i parabola, već se one u projektivnoj geometriju promatraju zajednički kao konike.

1. Projektivna ravnina i projektivni prostor

1.1 Projektivna ravnina

Uvodimo dva skupa S_1 i S_2, čije elemente smatramo primitivnim (tj. nedefiniranim) elementima.

Elemente skupa S_1 označavati ćemo velikim latinskim slovima A, B, C, ... i zvati ćemo ih **točkama**, dok ćemo elemente skupa S_2 označavati malim latinskim slovima a, b, c, ... i zvati ćemo ih **pravcima**.

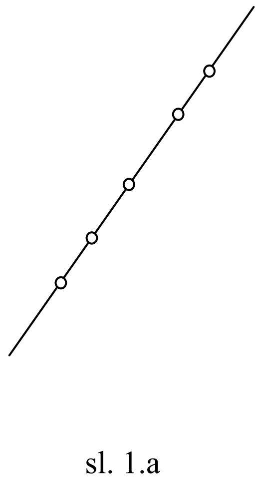
Nadalje, među primitivnim elementima skupa S_1 i S_2 uvodi se primitivna relacija, koju ćemo nazvati **relacija incidencije**.

Terminologija:

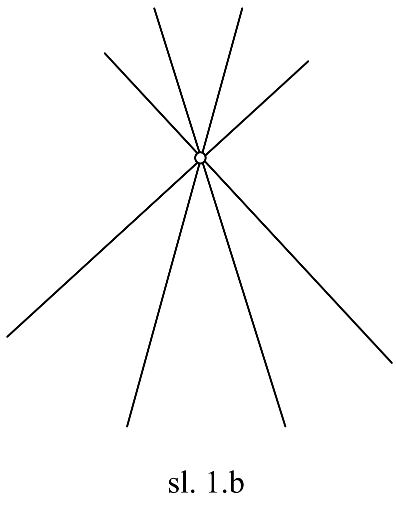
- pod izrazom: "točka A je (ili nije) incidentna s pravcem a" podrazumijeva se: "točka A leži (ili ne leži) na pravcu a" ili "pravac a prolazi (ili ne prolazi) točkom A";
- izrazom: "dvije točke A i B su incidentne s jednim pravcem a" podrazumijeva se: "dvije točke A i B leže na pravcu a" ili "pravac a prolazi točkama A i B";
- izrazom: "točka A je incidentne s dva pravca a i b" podrazumijeva se: "točka A je sjecište pravaca a i b" ili "pravci a i b se sijeku u točki A".

Podsjetimo se:

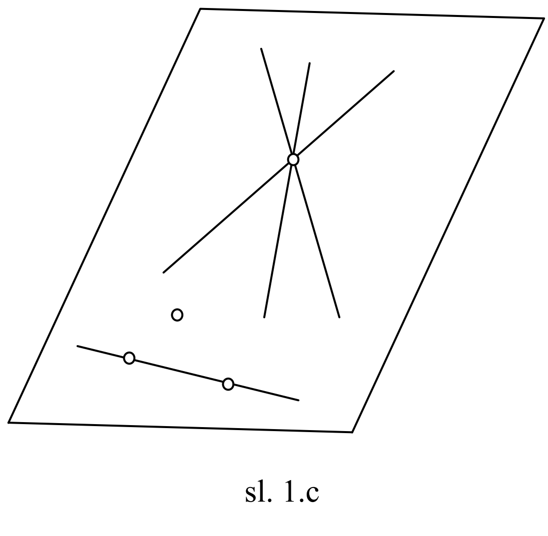
- Za bilo koji broj različitih točaka incidentnih s jednim pravcem kažemo da su one ***kolinearne*** (sl. 1.a).
- Za bilo koji broj različitih pravaca, koji su incidentni s jednom točkom kažemo da su oni ***konkurentni*** (sl. 1.b).
- Za bilo koji broj točaka ili pravaca ili oboje, koji su incidentni s jednom ravninom (tj. leže u nekoj ravnini) kažemo da su ***komplanarni*** (sl. 1.c).



sl. 1.a



sl. 1.b



sl. 1.c

Osnovni preduvjet za izgradnju netrivijalne teorije (proj. geom.) su sljedeći aksiomi, koji opisuju svojstva relacije incidencije:

Aksiom A1:

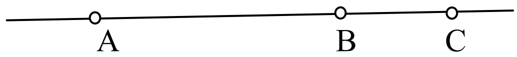
Postoje najmanje dvije različite točke.

Aksiom A2:

Postoji točno jedan pravac incidentan s dvije različite točke.

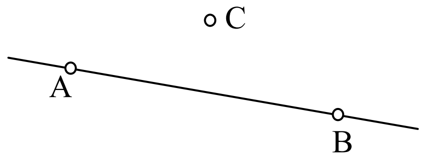
Aksiom A3:

Ako su A i B dvije različite točke, onda postoji barem jedna točka C različita od A i B, koja je incidentna s pravcem AB.



Aksiom A4:

Ako su A i B dvije različite točke, onda postoji barem jedna točka koja nije incidentna s pravcem AB.

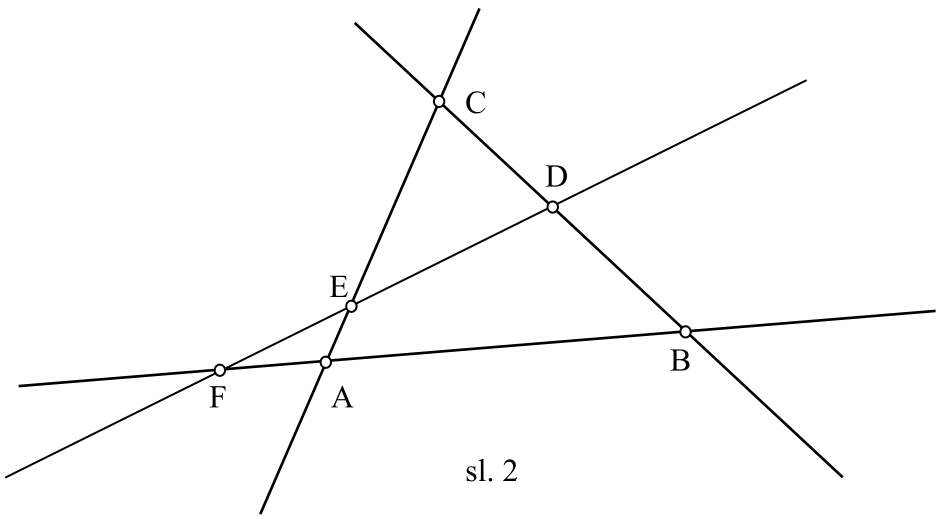


Aksiom A5:

Ako su A, B i C tri nekolinearne točke i ako vrijedi:

- ✓ točka D (različita od točaka B i C) je na spojnici BC,
- ✓ točka E (različita od točaka C i A) je na spojnici CA,

onda postoji točka F (različita od točaka A i B) na spojnici AB, takva da su točke D, E i F kolinearne točke (vidi sl. 2)



sl. 2

Komentar:

Primjenom aksioma A2 imamo da tri nekolinearne točke A, B i C odeđuju pravce AB, BC i AC, kao spojnice po dviju od tih točaka. U nastavku će se definirati (vidi figure proj. ravnine) figura, koja se sastoji od tri nekolinearne točke A, B, C i njihovih spojnica AB, BC i AC i zove **trovrh ABC**. Pritom se točke A, B i C zovu <u>*vrhovi trovrha*</u>, a njihove spojnice <u>*stranicama trovrha* ABC</u>.

Sada se aksiom A5 može izreći:

- Ako neki pravac a ne prolazi nijednim vrhom trovrha ABC i ako siječe dvije njegove stranice, onda taj pravac siječe i treću stranicu tog trovrha.

Uočimo da u euklidskoj geometriji ne vrijedi aksiom A5, zbog moguće paralelnosti dvaju pravaca, koja ne egzistira u projektivnoj geometriji.

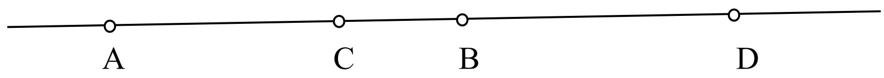
Napomenimo da egzistenciju triju nekolinearnih točaka osigurava aksiom A4.

Primijetimo da nam aksiom A2 izriče:

- dvije različite točke A i B možemo uvijek spojiti jednim i samo jednim pravcem, kojeg zovemo spojnicom AB točaka A i B.

Također, kao neposredna posljedica aksioma A2 su izreke:

- Ako su C i D dvije različite točke pravca AB, onda su A i B točke pravca CD.



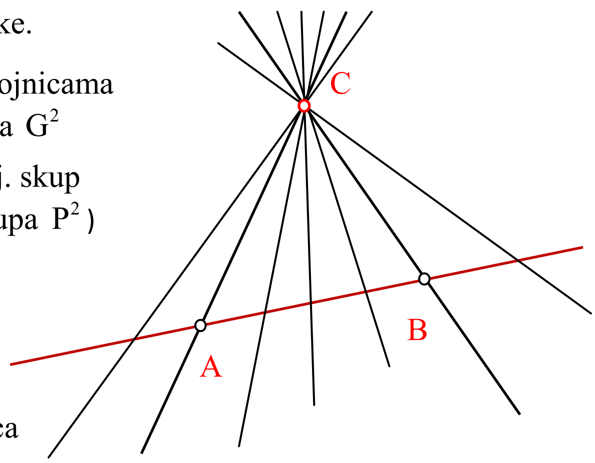
Drugim riječima, *pravac je određen bilo kojim svojim dvjema točkama*.

- Dva različita pravca ne mogu imati više od jedne zajedničke točke.

Drugim riječima, sa dva različita pravca može biti incidentna najviše jedna točka.

- Pretpostavimo da su A, B i C tri nekolinearne točke.

  Označimo sa P^2 skup svih točaka koje leže na spojnicama točke C sa svim točkama pravca AB i označimo sa G^2 skup svih spojnica po dviju točaka iz skupa P^2 (tj. skup svih pravaca incidentnih s dvijema točkama iz skupa P^2)



Definicija 1.1.1

Skupovi P^2 i G^2 primitivnih elemenata točaka i pravaca zajedno sa relacijom incidencije i aksiomima A1-A5 definiraju **projektivnu ravninu**.

- Kažemo da je projektivna ravnina zadana trima nekolinearnim točkama A, B i C, stoga se u tom smislu često naziva ABC ravninom.

U situaciji kada se promatra projektivna ravnina, podrazumijeva se da su sve točke elementi skupa P^2, tj. da je $S_1 = P^2$, a samim time da je $S_2 = G^2$.

Teorem 1.1.2

Dva različita pravca projektivne ravnine sijeku se u točno jednoj točki.

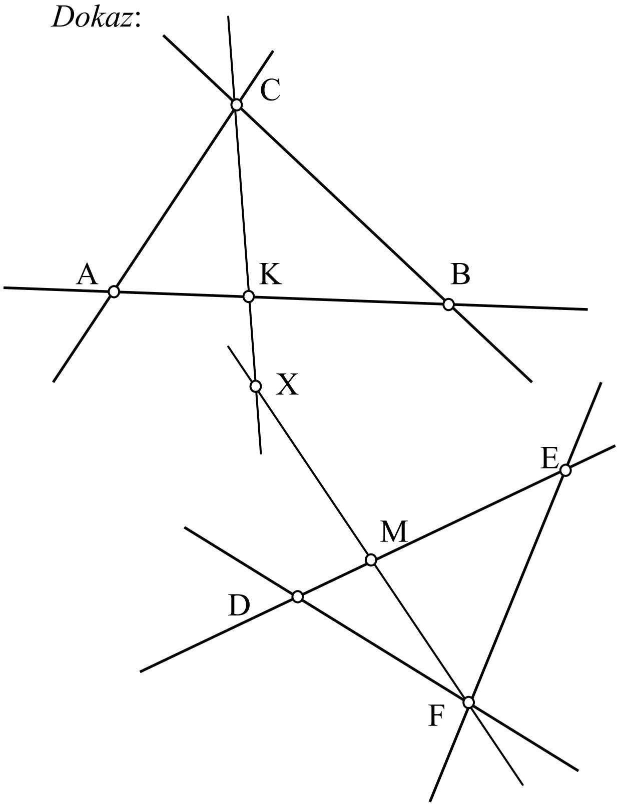
Dokaz: (na vježbama ili udžbenik str. 2-4).

Teorem 1.1.3

Neka je projektivna ravnina određena kao skup P^2 svih točaka koje leže na spojnicama točke C sa svim točkama pravca AB, gdje su A, B i C tri nekolinearne točke.

Bilo koje tri nekolinearne točke D, E i F skupa P^2 određuju na isti način isti taj skup, tj. svaka točka skupa P^2 leži na nekoj spojnici točke F sa nekom točkom spojnice DE.

Dokaz:



Neka je X bilo koja točka ravnine P^2.

Tada točka X leži na spojnici točke C i neke točke K pravca AB.

Primjenom teorema 1.1.2 (svaka dva pravca proj. ravnine se sijeku u točno jednoj točki) zaključujemo:

pravac DE i spojnica XF se sijeku u nekoj točki M, čime dobivamo:

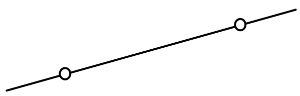
svaka točka ravnine leži na nekoj spojnici točke F i neke točke M pravca DE.

Komentar 1.1.4

U situaciji kada se promatra, tj. proučava samo projektivna ravnina (bez generalizacije na projektivni prostor), aksiome A1-A5 često zamjenjujemo sljedećim jednostavnijim aksiomima:

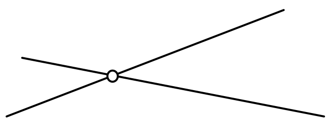
Aksiom B1:

Postoji točno jedan pravac incidentan s dvije različite točke.



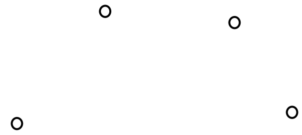
Aksiom B2:

Postoji točno jedna točka incidentna s dva različita pravca.



Aksiom B3:

Postoje četiri različite točke, od kojih tri nisu kolinearne.



Uočiti:

- aksiom B1 je identičan aksiomu A2,
- aksiom B2 je identičan teoremu 1.1.2.

1.2 Projektivni prostor

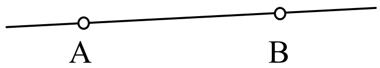
Podsjetimo se prethodnih pet aksioma:

Aksiom A1:

Postoje najmanje dvije različite točke.

Aksiom A2:

Postoji točno jedan pravac incidentan s dvije različite točke.

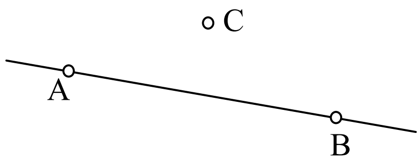


Aksiom A3:

Ako su A i B dvije različite točke, onda postoji barem jedna točka C različita od A i B, koja je incidentna s pravcem AB.

Aksiom A4:

Ako su A i B dvije različite točke, onda postoji barem jedna točka koja nije incidentna s pravcem AB.

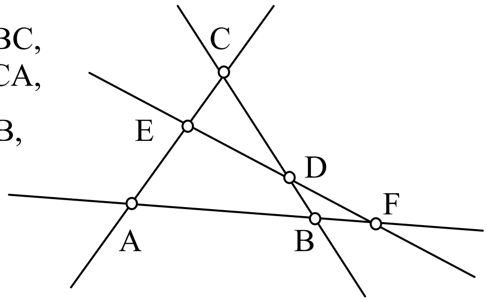


Aksiom A5:

Ako su A, B i C tri nekolinearne točke i ako vrijedi:

- ✓ točka D (različita od točaka B i C) je na spojnici BC,
- ✓ točka E (različita od točaka C i A) je na spojnici CA,

onda postoji točka F (različita od točaka A i B) na spojnici AB, takva da su točke D, E i F kolinearne.



te dodajmo još sljedeći aksiom:

Aksiom A6:

Ako su A, B i C tri nekolinearne točke, onda postoji barem jedna točka D, koja ne leži u ravnini određenoj točkama A, B i C.

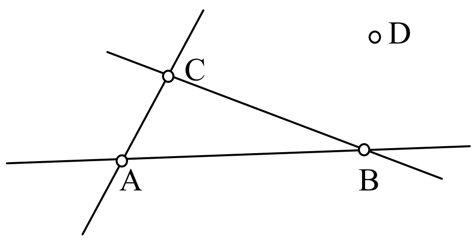
Drugim rječima, aksiomom A6 pretpostavili smo da postoje 4 nekomplanarne točke, čime smo omogućili definiranje projektivnog prostora.

Definicija 1.2.1

Skup P^3 primitivnih elemenata točaka zajedno sa relacijom incidencije i aksiomima A1-A6 definiraju **projektivni trodimenzionalni prostor**.

Pritom se skup P^3 sastoji od svih točaka, koje leže na spojnicama točke D sa svim točkama skupa P^2 zadanog nekolinearnim točkama A, B i C.

Kažemo da je taj prostor zadan nekomplanarnim točkama A, B, C i D i jednostavno ga nazivamo projektivnim prostorom ABCD.



Komentar 1.2.2

Dodavanjem aksioma (analognog aksiomu A6), kojim se osigurava postojanje točaka koje ne pripadaju skupu P^3 dobili bi pojam 4-dimenzionalnog projektivnog prostora.

Jasno, na opisani način može se doći do pojma n-dimenzionalnog projektivnog prostora, čime se nećemo baviti u okviru ovog kolegija.

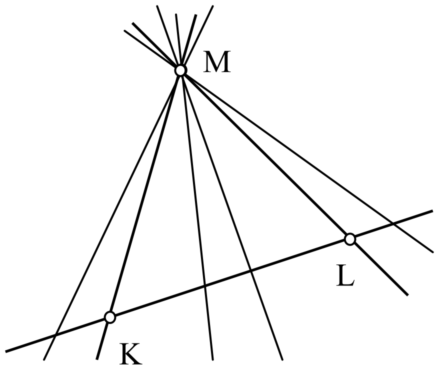
Budući da će se daljna razmatranja ograničiti samo na trodimenzionalni projektivni prostor, može se dodati sljedeći aksiom:

Aksiom A7:

Ako je P^3 trodimenzionalni projektivni prostor, onda sve točke leže u tom prostoru.

Uočimo:

ako u trodimenzionalnom projektivnom prostoru P^3 odaberemo tri proizvoljne nekolinearne točke K, L, M i ako na prethodno opisani način promotrimo skup svih točaka, koje leže na spojnicama točke M sa svim točkama pravca KL, onda dobivamo podskup α skupa P^3, koji se naziva <u>*ravnina projektivnog prostora*</u>.



Ravnine projektivnog prostora P^3 označavati će se malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, ...$

Teorem 1.2.3

Ravnina u projektivnom prostoru jednoznačno je određena bilo kojim svojim trima nekolinearnim točkama.

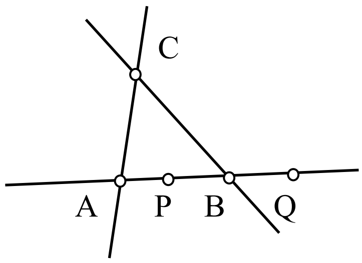
Dokaz: teorem 1.2.3 analogan je teoremu 1.1.3.

Teorem 1.2.4

Ako dvije različite točke P i Q leže u ravnini α određenoj nekolinearnim točkama A, B i C, onda svaka točka spojnice PQ (tj. pravac PQ) leži u toj ravnini α.

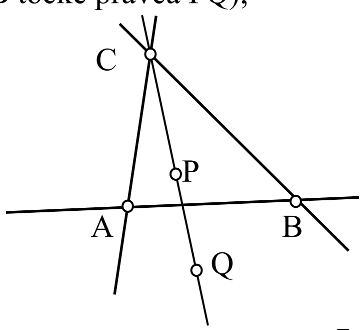
Dokaz:

Neka je predmet promatranja trodimenzionalni projektivni prostor P^3 i neka je ravnina α u prostoru P^3 određena nekolinearnim točkama A, B i C.



- ako točke P i Q leže na pravcu AB, onda direktno iz posljedice aksioma A2 proizlazi da pravac PQ leži u ravnini α
(uočimo: ako su P i Q dvije različite točke pravca AB, onda su A i B točke pravca PQ);

- ako su točke P i Q kolinearne s točkom C, onda prema definiciji 1.1.1 proizlazi da će svaka točka spojnice PQ (tj. pravac PQ) ležati u ravnini α.
(direktna posljedica definicije projektivne ravnine)

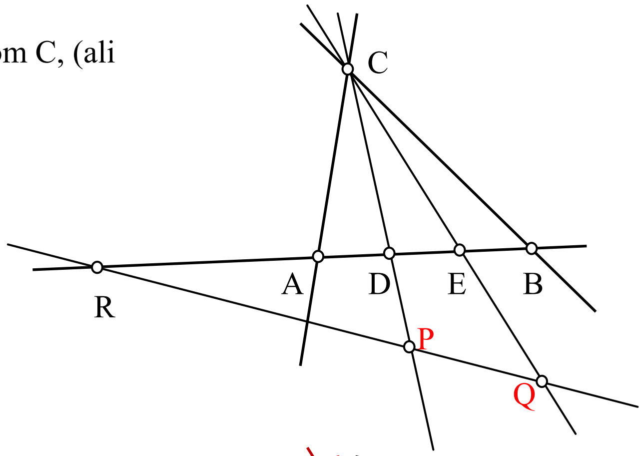


- Pretpostavimo da točke P i Q nisu kolinearne s točkom C, (ali isto tako da ne leže na pravcu AB).
  Tada prema definiciji 1.1.1 imamo:

  - ✓ točka P leži na pravcu CD,
  - ✓ točka Q leži na pravcu CE,

  pri čemu su točke D i E neke točke pravca AB (ne nužno različite od točaka A i B).

  Treba dokazati da pravac PQ leži u ravnini α (određenoj nekolinearnim točkama A, B i C).



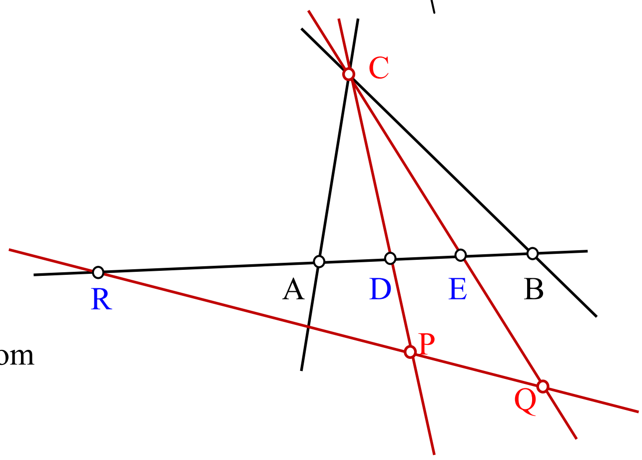
- Promatrajmo trovrh CPQ te uočimo:

  - ✓ točka D leži na spojnici (pravcu) CP,
  - ✓ točka E leži na spojnici (pravcu) CQ,

  stoga primjenom aksioma A5 zaključujemo:

  postoji točka R na spojnici (pravcu) PQ takva da su točke D, E i R kolinearne.

  Nadalje, kako su D i E točke na pravcu AB, primjenom aksioma A2 zaključujemo da iz kolinearnosti točaka D, E i R te kolinearnosti točaka A, B, D i E proizlazi kolinearnost točaka A, B i R, što se interpretira da točka R leži na pravcu AB.



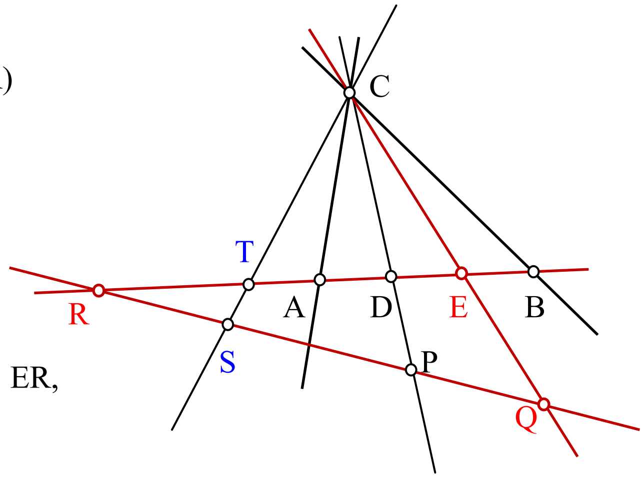
Dokažimo sada da bilo koja točka pravca PQ leži u ravnini α, tj. na spojnici točke C i neke točke pravca AB.

- Promatrajmo trovrh QER (ili analogno trovrh PDR) te na njega primijenimo aksioma A5:

  Neka je:

  - ✓ S neka točka na spojnici (pravcu) QR i promatrajmo
  - ✓ točku C na spojnici (pravcu) QE

  tada prema aksiomu A5 postoji točka T na spojnici ER, takva da su točke S, T i C kolinearne točke.



Uočimo:

točka T ujedno leži na pravcu AB, čime zaključujemo da točka S (koja leži na pravcu PQ) leži i na spojnici točke C i neke točke T pravca AB, a samim time i u ravnini α (određenoj nekolinearnim točkama A, B i C).

Na opisani način pokazuje se da svaka točka spojnice (pravca) PQ leži u ravnini α, čime je teorem dokazan.

Sljedećim teoremima iskazuju se neka svojstva projektivnog prostora.

Teorem 1.2.5

Pravac p koji ne leži u ravnini α ima s tom ravninom točno jednu zajedničku točku (probodište).

Teorem 1.2.6

Dvije različite ravnine α i β projektivnog prostora imaju točno jedan zajednički pravac (presječnicu).

Teorem 1.2.7

Tri različite ravnine projektivnog prostora imaju ili točno jednu zajedničku točku ili točno jedan zajednički pravac.

Teorem 1.2.8

Projektivni prostor P^3 određen je bilo kojim svojim četirima nekomplanarnim točkama.

Teorem 1.2.8 analogan je teoremu 1.1.3, odnosno teoremu 1.2.3 (kojim je iskazano da je projektivna ravnina određena svojim trima nekolinearnim točkama).

Naime, ako u projektivnom prostoru P^3 zadanom točkama A, B, C i D odaberemo proizvoljne četiri nekomplanarne točke K, L, M i N, onda skup točaka (koje dobijemo kao sve točke što leže na spojnicama svih točaka ravnine KLM s točkom N) jednak je skupu točaka prostora P^3.