1. VEKTORI

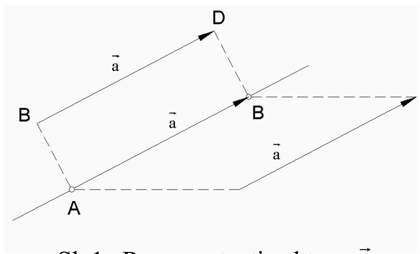
POJAM VEKTORA

Svakodnevno se susrećemo s veličinama za čije je određivanje potreban samo jedan broj. Na primjer udaljenost, površina, volumen,…. Njih zovemo *skalarnim* veličinama.
Međutim, postoje veličine koje ne možemo potpuno odrediti brojem, već je potrebno zadati i njihov *smjer*. Na primjer ubrzanje, strujanje, vjetar, itd. Njih zovemo *vektorskim* veličinama.

Vektor kao skup (klasa) usmjerenih dužina

Neka su A, B dvije točke na pravcu, u ravnini ili u prostoru. Dužinu s krajevima A, B označavamo s $\overline{AB}$. Duljinu dužine $\overline{AB}$ označavamo s $|AB|$ ili $d(A,B)$.

Usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ je dužina za koju se zna *početna točka A* i *završna točka B.*
Za dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ kažemo da su *ekvivalentne* ako postoji translacija koja prvu prevodi u drugu, tj. ako je četverokut $ABDC$ paralelogram.



Sl. 1 Reprezentanti vektora $\vec{a}$

Definicija
Skup svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina nazivamo *vektorom*.

Dakle, vektor se može predočiti pomoću više različitih usmjerenih dužina – *reprezentanata* ili *predstavnika vektora*. Često se za vektor upotrebljava i naziv: *klasa* usmjerenih dužina.

Zbog jednostavnosti ćemo bilo koju usmjerenu dužinu (reprezentantu vektora) nazivati vektorom i označavati $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$ ili $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$.

Skup svih vektora nekog prostora označavat ćemo s $\boldsymbol{V}$. Za naše potrebe $\boldsymbol{V}$ će biti jednodimenzionalni prostor $\boldsymbol{V}^1$ (pravac), dvodimenzionalni prostor $\boldsymbol{V}^2$ (ravnina) ili trodimenzionalni prostor $\boldsymbol{V}^3$.

Geometrijski, vektor je zadan sa:

- ***pravcem nosiocem*** na kojem se vektor nalazi,
- ***duljinom*** ili ***modulom***: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = d(A,B)$,
- ***orijentacijom*** na pravcu nosiocu.

Ponekad se govori o ***smjeru*** vektora. Smjer objedinjuje nosioca i orijentaciju.

OPERACIJE S VEKTORIMA

Potrebni pojmovi:

Nul vektor

- vektor duljine 0,
- oznaka: $\vec{0}$,
- vrijedi: $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$,
- duljina (modul) nul vektora: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Jedinični vektor

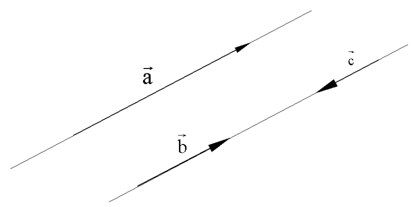
- vektor duljine 1,
- za zadani vektor $\vec{a}$, duljine $|\vec{a}|$, jedinični vektor je definiran sa $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$,
- $\vec{a}_0$ je vektor koji ima isti smjer kao i $\vec{a}$ a duljina mu je 1.

Radijvektor (radijus vektor)

Ako je T neka točka prostora a O ishodište koordinatnog sustava, vektor $\overrightarrow{OT}$ nazivamo *radijvektor* točke T. Zapisujemo ga i $\vec{r}_T$.
Za svaki vektor možemo izabrati njegovog predstavnika tako da mu početna točka bude baš točka O. Na taj se način dobiva radijvektor neke (bilo koje) točke.

Kolinearni vektori

Vektori koji pripadaju istom ili paralelnim pravcima.



Sl. 2 Kolinearni vektori

Komplanarni vektori

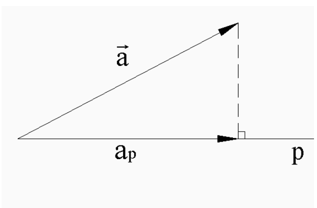
Vektori koji pripadaju istoj ili paralelnim ravninama.

Projekcija vektora

- Ortogonalna projekcija u ravnini na pravac p je funkcija koja svakoj točki A ravnine pridružuje točku u kojoj okomica na p, koja prolazi točkom A, siječe pravac p.
- Ortogonalna projekcija u prostoru na pravac p je funkcija koja svakoj točki A prostora pridružuje točku u kojoj ravnina koja prolazi točkom A, a okomita je na p, siječe pravac p.

Zadatak:

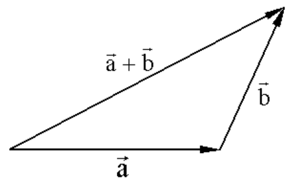
Nacrtati vektorsku projekciju vektora $\vec{a}$ na pravac p.



Sl. 3 Projekcija vektora na pravac

I. Zbrajanje vektora

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bilo kakvi vektori. *Zbrajanje* vektora je funkcija koja paru vektora $(\vec{a},\vec{b})$ pridružuje vektor $\vec{a}+\vec{b}$.



Sl. 4 Pravilo trokuta

Vektore zbrajamo po ***pravilu trokuta*** ili po ***pravilu paralelograma***.

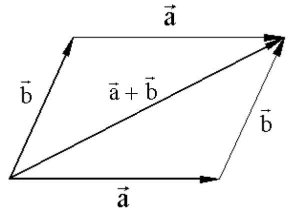
Svojstva operacije zbrajanja:

(1) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,

(2) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$,

(3) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$,

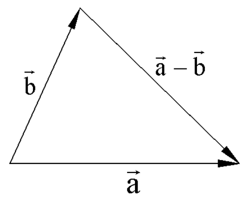
(4) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.



Sl. 5 Pravilo paralelograma

Oduzimanje vektora

Oduzimanje vektora se definira kao operacija zbrajanja sa suprotnim vektorom: $\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b})$.



Sl. 6 Oduzimanje vektora

II. Množenje vektora sa skalarom (brojem)

Neka je $\vec{a}$ vektor i λ realni broj. *Množenje vektora sa skalarom* je funkcija koja paru $(\lambda,\vec{a})$ pridružuje vektor $\lambda\vec{a}$.

Za vektor $\overrightarrow{\lambda a}$ vrijedi:

- $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ su kolinearni (imaju isti ili paralelni nosač),
- $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$,
- $\lambda>0\Rightarrow$ $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ su isto orijentirani,
  $\lambda<0\Rightarrow$ $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ su suprotno orijentirani.

Svojstva operacije množenja sa skalarom:

(5) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$,

(6) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$,

(7) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})=\lambda\mu\vec{a}$,

(8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a},\quad(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a},\quad 0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Skup *V* s operacijama zbrajanja i množenja sa skalarom te svojstvima (1) – (8) tvori *strukturu* koju nazivamo ***vektorski (linearni) prostor***, i koju zapisujemo (***V***, +, ·).

III. Skalarni produkt vektora (skalarni umnožak)

Neka su

$\vec{a},\vec{b}$ – dani vektori, i

$\varphi = \angle(\vec{a},\vec{b})$ – kut među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

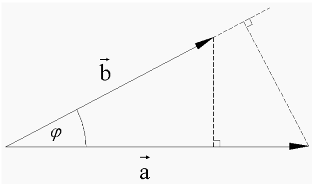
Skalarni produkt (umnožak) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je funkcija koja paru vektora $(\vec{a},\vec{b})$ pridružuje broj (skalar) $\vec{a}\cdot\vec{b} \in R$, definirana sa:

$$\underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi}.$$

Pomoću skalarnog produkta izračunava se i projekcija vektora na vektor, tj.

$\vec{a}\cdot\vec{b}_0 = |\vec{a}|\cos\varphi = a_b$ $\Rightarrow$ skalarna projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$,

$\vec{a}_0\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi = b_a$ $\Rightarrow$ skalarna projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$,



Sl. 7 Skalarne projekcije vektora na vektor

$(\vec{a}\cdot\vec{b}_0)\vec{b}_0 = a_b\vec{b}_0$ $\Rightarrow$ vektorska projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$,

$(\vec{a}_0\cdot\vec{b})\vec{a}_0 = b_a\vec{a}_0$ $\Rightarrow$ vektorska projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.

Posljedice skalarnog množenja:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$, $\quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$,

(2) $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$,

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ ili je barem jedan jednak $\vec{0}$,

(3) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, (0 \le \varphi \le \pi)$.

Svojstva skalarnog množenja:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a} \ge 0,\quad \vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$, - *nenegativnost*

(2) $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$, - *homogenost*

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, - *komutativnost*

(4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$. - *distributuvnost*

Primjer:

Za vektore $\vec{a},\vec{b}$ vrijedi: $|\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{30}, \angle(\vec{a},\vec{b}) = 45^\circ$. Neka su $\vec{e} = 4\vec{a} - \vec{b},\ \vec{f} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

Izračunati $\vec{e}\cdot\vec{f}$.

$\vec{e}\cdot\vec{f} = (4\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b}) = 4\vec{a}\cdot\vec{a} + 11\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = \cdots = -70 + 55\sqrt{3}$.

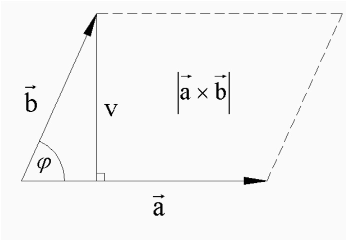
IV. Vektorski produkt vektora (vektorski umnožak)

Neka su

$\vec{a}, \vec{b}$ – dani vektori, i

$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ – kut među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Vektorski produkt (umnožak) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je funkcija koja paru vektora $(\vec{a}, \vec{b})$ pridružuje vektor $\vec{a} \times \vec{b}$.



Sl. 8 Modul vektorskog produkta

Za vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ vrijedi:

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$
  Geometrijski, modul vektorskog produkta jednak je površini paralelograma što ga zatvaraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. To vidimo iz: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi = |\vec{a}| v$.

- Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je $\perp$ na vektor $\vec{a}$ i na vektor $\vec{b}$.
  $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$,
  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ kolinearni ili je barem jedan od njh $\vec{0}$.

- Trojka vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ čini *desnu trojku*, tj. gledano iz vrha vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ rotacija iz $\vec{a}$ u $\vec{b}$ suprotna je gibanju kazaljke na satu.

Svojstva vektorskog množenja:

(1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$,

(2) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$, - *homogenost*

(3) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, - *antikomutativnost*

(4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. - *distributuvnost*

V. Mješoviti produkt vektora

Neka su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ dani vektori. *Mješoviti produkt* (umnožak) vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ je funkcija koja trojki vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ pridružuje broj $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \in R$.

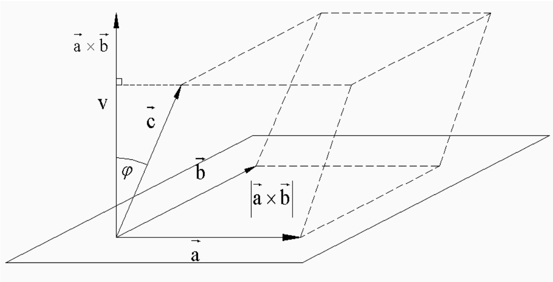
Oznaka: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Svojstva:

(1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$,

(2) $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Geometrijska interpretacija mješovitog produkta:



Sl. 9

Neka su $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ zadani nekomplanarni vektori i $\varphi = \angle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)$ kut među vektorima $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ i $\vec{c}$.

Tada je

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right| cos\,\varphi$$

$$cos\,\varphi = \frac{v}{\left|\vec{c}\right|}\ ,\quad v = \left|\vec{c}\right| cos\,\varphi\ ,\quad B = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

$\underline{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = B\cdot v = \pm V}$, tj. apsolutna vrijednost mješovitog produkta triju vektora jednaka je volumenu paralelepipeda kojeg tvore ti vektori (vidi sliku 9).