Matematika 1 (2011/2012)

RANG MATRICE

Koliki je rang neke matrice najlakše je ustanoviti tako da se matricu pokuša svesti na trokutasti oblik elementarnim transformacijama. **Elementarne transformacije** nad matricama su:

i) zamjena dvaju redaka (ili stupaca)

ii) množenje bilo kojeg retka (ili stupca) brojem različitim od nule

iii) množenje bilo kojeg retka (stupca) brojem različitim od nule i dodavanje drugom retku (stupcu)

Uzastopnom primjenom elementarnih transormacija moguće je matricu svesti na **reducirani oblik** koji je jedinstven. Tu podrazumijevamo sljedeći oblik matrice:

- Prvi ne-nul element (stožer) svakog retka iznosi 1. Svi elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su nuli.
- Svi retci koji sadrže samo nul elemente (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže barem jedan ne-nul element.
- Svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno od prethodnog stožera.

Evo nekoliko primjera reduciranih formi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rang matrice je broj ne-nul redaka u reduciranom obliku matrice. Označavamo ga slovom r i pišemo $r(A) = r$.

Ako je matrica A tipa $m \times n$, tada je uvijek $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

$A \in \mathcal{M}_n$. Vrijedi: $r(A) = n$ ako i samo ako $\det A \neq 0$. Reducirana forma takve matrice je jedinična matrica.

Matrice A i B istog tipa su ekvivalentne ako imaju isti rang. Pišemo $A \sim B$. Vrijedi: Ako su matrice A i B ekvivalentne, tada se matrica B može dobiti iz matrice A pomoću elementarnih transformacija.

INVERZNA MATRICA

Za kvadratnu matricu A kažemo da je **regularna** ako postoji matrica, označavamo je s A^{-1}, za koju vrijedi:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}$$

Matricu A^{-1} nazivamo **inverzna matrica**.

$A \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako $r(A) = n$.
$A \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako $\det(A) \neq 0$.

Svojstva:

- Matrica I_n je regularna.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, za sve A, B regularne matrice.
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, za svaku A regularnu matricu.

Inverznu matricu računamo svođenjem na reducirani oblik. Postupak se provodi na tzv. proširenoj matrici koja se sastoji u lijevom dijelu od matrice A, a u desnom od jedinične matrice I. Iz proširene matrice $\left[A \vdots \mathrm{I}\right]$ elementarnim transformacijama trebamo dobiti oblik $\left[\mathrm{I} \vdots A^{-1}\right]$

Cramerovo pravilo za računanje inverza matrice

Vrijedi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

pri čemu je $A_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ji}$.

M_{ji} je **minor** elementa a_{ij}: determinanta matrice reda $n-1$ u kojoj se ne nalazi i-ti redak niti j-ti stupac početne matrice.

MATRIČNE JEDNADŽBE

Promatramo matrične jednadžbe oblika

$$AX = B, \quad YA = C.$$

Rješenje X prve matrične jednadžbe postoji ako je matrica A regularna i ako je dobro definiran produkt $X = A^{-1}B$. Analogno zaključujemo za drugu matričnu jednadžbu $YA = C$, koja ima rješenje $Y = CA^{-1}$ jedino ako je matrica A regularna matrica i ako je dobro definiran produkt CA^{-1}.