Matematika 1 (2011/2012)

Vektori

1. Neka je O središte pravilnog šesterokuta $ABCDEF$. Ako je $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, onda izrazite pomoću navedenih vektora sljedeće vektore: $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{DA}$.

2. Za koju vrijednost p vektori $\vec{a} = p\vec{i} - 2\vec{j}$ i $\vec{b} = 5\vec{i} + (p-1)\vec{j}$ imaju jednake duljine.

3. Neka su $A(-3,1)$, $B(1,-2)$ i $C(5,7)$ vrhovi trokuta. Odredite vektore $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$.

4. Točka C dijeli dužinu AB u omjeru $\lambda : 1$. Prikažite vektor $\overrightarrow{OC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. O je ishodište koordinatnog sustava.

5. Tri uzastopna vrha paralelograma su točke $A(-3,2)$, $B(1,-3)$ i $C(4,0)$. Odredi duljinu dijagonale $\overline{BD}$ paralelograma $ABCD$.

6. Svaki od vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{c} = 7\vec{i} - 4\vec{j}$ napišite kao linearnu kombinaciju ostalih dvaju.

7. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{j}$. Odredite koordinate vektora $\vec{p}$ ako je: $\vec{p} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

8. Zadani su vektori $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ i $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$. Odredite vrijednost realnog broja λ tako da vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ budu kolinearni, ako je
$$\vec{p} = \vec{u} + \lambda\vec{v}, \quad \vec{q} = \vec{u} - \lambda\vec{v}.$$

9. Pokažite da je trokut ABC jednakokračan ako su mu zadani vrhovi $A(2,4,5)$, $B(3,2,3)$, $C(0,5,3)$.

10. Neka je trokutu ABC točka P polovište dužine $\overline{AB}$, točka R takva da je $3\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AC}$, te S polovište dužine $\overline{PR}$. U kojem omjeru pravac AS dijeli stranicu BC?

11. Odredite skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

(a) $|\vec{a}| = 2, \;\; |\vec{b}| = 3, \;\; \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$

(b) $\vec{a} = [3, 1, -2], \quad \vec{b} = [5, -1, -4]\,.$

12. Dokažite da je vektor $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ okomit na vektor $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$, ako je $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

13. Izračunajte kut između vektora $\vec{a} = [-1, -1, 4]$ i $\vec{b} = [1, -2, 2]$.

14. Odredite vrijednost realnog broja λ tako da vrijedi: $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, gdje je $\vec{a} = \vec{i} + \lambda\vec{j} + (2 - 2\lambda)\vec{k}, \quad \vec{b} = -\vec{i} + 8\vec{j} + 5\vec{k}$ i $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{k}$.

15. Neka su $A(3, 0, 1)$, $B(6, 2, 2)$ i $C(5, -3, 1)$ vrhovi trokuta ABC. Dokažite da je to pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu A.

16. Neka su dani vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ i $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$. Izračunajte $(\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{c} - \vec{a})$.

17. Izračunajte površinu paralelograma razapetog vektorima: $\vec{a} = 2\vec{q} - \vec{p}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, ako je $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1, \;\; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

18. Izračunajte površinu trokuta kojemu su vrhovi $A(4, -2, 6), B(6, -1, 7), C(5, 0, 5)$.

19. Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Dokažite da vrijedi:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

20. Izračunajte visinu paralelopipeda razapetog vektorima $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, ako je za osnovicu uzet paraleogram razapet vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

21. Dani su vektori $\vec{a} = [0, 2\lambda, \lambda]\,,\ \vec{b} = [2, 2, 1]$ i $\vec{c} = [-1, -2, -1]$. Odredite vektor $\vec{d}$ koji zadovoljava uvjete $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$.