2.9 Osnovni teorem teorije krivulja

Neka je regularna prostorna krivulja $\mathcal{C}$ zadana vektorskom jednadžbom

$$\mathcal{C} \ldots \; \vec{x}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} + z(s)\,\vec{k}, \quad s \in [0, \mathrm{L}]$$

tako da nijedna točka $\mathrm{T} = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$ krivulje $\mathcal{C}$ nije točka izravnavanja.

Jasno, iz rečenog proizlazi $\vec{x}'(s) \neq \vec{0}$, $\chi(s) > 0$ i $\tau(s) \neq 0$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$.

Primijetimo da vektorska jednadžba regularne prostorne krivulje $\mathcal{C}$ ovisi o koordinatnom sustavu trodimenzionalnog prostora, stoga se na prirodan način nameće sljedeće pitanje:

- da li je moguće predočiti krivulju nekom jednadžbom, koja će biti neovisna o koordinatnom sustavu i koja će geometrijski potpuno predočavati tu krivulju?

Odgovor je potvrdan, naime ako su u svakoj točki regularne krivulje poznate njene zakrivljenosti: fleksija i torzija, onda je krivulja jednoznačno određena skalarnim funkcijama, tj. jednadžbama $\chi = \chi(s)$ i $\tau = \tau(s)$, gdje je s prirodni parametar (vidi teorem 2.9.2).

Pritom se jednadžbe

$$\chi = \chi(s), \quad \tau = \tau(s) \tag{86}$$

nazivaju **<u>prirodnim jednadžbama regularne prostorne krivulje</u>** $\mathcal{C}$.

S obzirom na prethodna razmatranja, može se naslutiti važnost fleksije i torzije regularne krivulje u njenom geometrijskom opisu. Konkretno, ako je $\mathcal{C} \ldots \; \vec{x} = \vec{x}(s)$ regularna prostorna krivulja takva da za svaki $s \in [0, \mathrm{L}] \subset \mathbb{R}$ vrijedi:

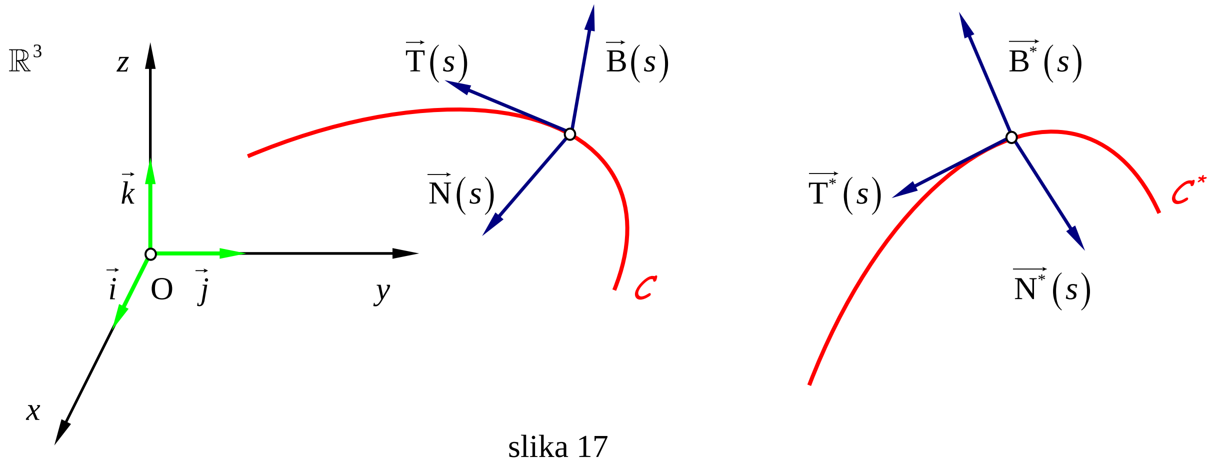
- $\chi(s) = 0$, onda je ta krivulja pravac (propozicija 2.5.6),
- $\chi(s) \neq 0$, $\tau(s) = 0$, onda je ta krivulja ravninska krivulja (teorem 2.6.4),
- $\chi(s) = c > 0$, $c = konst.$, $\tau(s) = 0$, onda je ta krivulja kružnica (propozicija 2.6.6),
- $\dfrac{\chi(s)}{\tau(s)} = konst.$, onda je ta krivulja heliks (primjer 2.5.5).

Uočimo da svaka točka pravca je ujedno točka izravnavanja $\big($tj. $\chi(s) = 0$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}] \subset \mathbb{R}\big)$.
S druge strane, svaki pravac u prostoru $\mathbb{R}^3$ je ujedno ravninska krivulja, jer leži u nekoj ravnini prostoru $\mathbb{R}^3$ $\big($tj. $\tau(s) = 0$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}] \subset \mathbb{R}\big)$.

Definicija 2.9.1

Za dvije regularne krivulje $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ kažemo da su **kongruentne** i pišemo $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}^*$ ako se krivulja $\mathcal{C}$ dobiva rotacijom (za neki fiksni kut) ili translacijom (za neki fiksni vektor) krivulje $\mathcal{C}^*$.

Drugim riječima, regularne prostorne krivulje $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ su **kongruentne** ako ih rotacijom ili translacijom možemo dovesti u položaj da se međusobno preklapaju (vidi sliku 17).



slika 17

Očito je da će dvije kongruentne krivulje $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ imati jednake zakrivljenosti za svaki prirodan parameatar s.

Drugim riječima, ako su $\vec{x}, \vec{x}^* : [0, \mathrm{L}] \to \mathbb{R}^3$ regularne parametrizacije kongruentnih krivulja $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ zadane vektorskim jednadžbama

$$\mathcal{C} \ \ldots \quad \vec{x}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} + z(s)\,\vec{k}$$

$$\mathcal{C}^* \ \ldots \quad \vec{x}^*(s) = x^*(s)\,\vec{i} + y^*(s)\,\vec{j} + z^*(s)\,\vec{k}$$

onda iz $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}^*$ proizlazi $\quad \chi(s) = \chi^*(s)$ i $\tau(s) = \tau^*(s)$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$.

Pritom je $\chi(s)$ fleksija i $\tau(s)$ torzija krivulje $\mathcal{C}$, odnosno $\chi^*(s)$ je fleksija i $\tau^*(s)$ je torzija krivulje $\mathcal{C}^*$.

Primijetimo, ako krivulju $\mathcal{C}$ translatiramo za neki fiksni vektor, onda u prostoru $\mathbb{R}^3$ dobivamo krivulju $\mathcal{C}^*$ koja je jednaka (kongruentna) krivulji $\mathcal{C}$ i analogno ako krivulju $\mathcal{C}$ rotiramo za neki fiksni kut, onda u prostoru $\mathbb{R}^3$ dobivamo krivulju koja je jednaka (kongruentna) krivulji $\mathcal{C}$. Jasno, ako krivulju $\mathcal{C}$ rotiramo za neki fiksni kut, a potom translatiramo za neki fiksni vektor, onda ćemo u prostoru $\mathbb{R}^3$ dobiti krivulju $\mathcal{C}^*$ "jednaku" krivulji $\mathcal{C}$. Time za kongruentne krivulje $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ na prirodan način proizaze identiteti: $\chi(s)=\chi^*(s)$ i $\tau(s)=\tau^*(s)$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$.

Nameće se sljedeće pitanje - da li vrijedi obrat, tj. ako za dvije krivulje $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ vrijedi da je $\chi(s)=\chi^*(s)$ i $\tau(s)=\tau^*(s)$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$, da li onda one moraju biti kongruentne? Odgovor je potvrdan, a on direktno proizlazi iz osnovnog teorema teorije krivulja (vidi teorem 2.9.2).

Teorem 2.9.2 (Osnovni teorem teorije krivulja)

Neka su $\chi=\chi(s)$ i $\tau=\tau(s)$ proizvoljne neprekidne funkcije definirane za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$. Tada u prostoru $\mathbb{R}^3$ postoji jedinstvena regularna krivulja $\mathcal{C}$ (do kongruentnosti – vidi def. 2.9.1) kojoj je $\chi(s)$ fleksija i $\tau(s)$ torzija, a s je prirodan parametar (duljina luka) te krivulja $\mathcal{C}$.

Interpretacija teorema

Ako je s duljina luka neke regularne krivulju u prostoru $\mathbb{R}^3$, onda je ta krivulja jednoznačno definirana svojim prirodnim jednadžbama $\chi=\chi(s)$ i $\tau=\tau(s)$.

Skalarne funkcije $\chi:[0,\mathrm{L}]\to\mathbb{R}^+$, $\tau:[0,\mathrm{L}]\to\mathbb{R}$ su realne nepekidne funkcije zadane sa $\chi=\chi(s)$ i $\tau=\tau(s)$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$. Pritom je: $\mathbb{R}^+=\{y\in\mathbb{R}\mid y>0\}$.

Napomenimo da prirodnim jednadžbama nije jednoznačno određen početni položaj krivulje u prostoru (vidi sliku 17).

Komentar 2.9.3

U nekim se literaturama osnovni teorem teorije krivulja iskazuje na sljedeći način:

- Krivulje $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ su kongruentne ako i samo ako odgovarajuće regularne parametrizacije $\mathcal{C},\mathcal{C}^*:[0,\mathrm{L}]\to\mathbb{R}^3$ zadane sa: $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$ i $\mathcal{C}^*$ ... $\vec{x^*}=\vec{x^*}(s)$ imaju svojstvo da je $\chi(s)=\chi^*(s)$ i $\tau(s)=\tau^*(s)$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$.

Ispišimo sada formule po kojima će se izračunavati prirodne jednadžbe prostorne krivulje u ovisnosti o parametru kojim je krivulja zadana.

- Ako je regularna prostorna krivulja parametrizirana prirodnim parametrom s, tj.

$$\mathcal{C}\ \ldots\ \vec{x}=\vec{x}(s),\quad s\in[0,\mathrm{L}],$$

onda se prirodne jednadžbe krivulje $\mathcal{C}$ računaju po formulama:

$$\chi(s)=\left|\vec{x}''(s)\right|, \qquad \tau(s)=\frac{\left(\vec{x}'(s),\vec{x}''(s),\vec{x}'''(s)\right)}{\chi^2(s)},$$

ili:

$$\chi(s)=\sqrt{\left(\ddot{x}(s)\right)^2+\left(\ddot{y}(s)\right)^2+\left(\ddot{z}(s)\right)^2}, \qquad \tau(s)=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x}(s) & \dot{y}(s) & \dot{z}(s)\\ \ddot{x}(s) & \ddot{y}(s) & \ddot{z}(s)\\ \dddot{x}(s) & \dddot{y}(s) & \dddot{z}(s)\end{vmatrix}}{\left(\ddot{x}(s)\right)^2+\left(\ddot{y}(s)\right)^2+\left(\ddot{z}(s)\right)^2}$$

gdje je prirodni parametar s varijabilan.

- Ako je regularna prostorna krivulja parametrizirana proizvoljnim parametrom t, tj.

$$\mathcal{C} \ \ldots \ \vec{x}=\vec{x}(t), \quad t\in[a,b],$$

onda se prirodne jednadžbe krivulje $\mathcal{C}$ mogu računati na dva načina:

(*i*) vektorsku jednadžbu $\vec{x}=\vec{x}(t)$ krivulje $\mathcal{C}$ reparametriziramo po prirodnom parametru s primjenom formule: $s(t)=\int_a^t\left|\vec{x}'(u)\right|\mathrm{d}u$, a potom fleksiju i torziju računamo prema gore navedenim formulama, stoga su

$$\chi(s)=\left|\vec{x}''(s)\right|, \quad \tau(s)=\frac{\left(\vec{x}'(s),\vec{x}''(s),\vec{x}'''(s)\right)}{\chi^2(s)},$$

prirodne jednadžbe regularne prostorne krivulje $\mathcal{C} \ \ldots \ \vec{x}=\vec{x}(s)$ (primijetimo da je sa $\mathcal{C} \ \ldots \ \vec{x}=\vec{x}(s)$ dana reparametrizacija krivulje $\mathcal{C} \ \ldots \ \vec{x}=\vec{x}(t)$ po prirodnom parametru);

(*ii*) s obzirom na zadanu vektorsku jednadžbu $\vec{x}=\vec{x}(t)$ krivulje $\mathcal{C}$ izračunavamo skalarne funkcije: $s(t)=\int_a^t\left|\vec{x}'(u)\right|\mathrm{d}u$, $\chi(t)=\dfrac{\left|\vec{x}'(t)\times\vec{x}''(t)\right|}{\left|\vec{x}'(t)\right|^3}$, $\tau(t)=\dfrac{\left(\vec{x}'(t),\vec{x}''(t),\vec{x}'''(t)\right)}{\left|\vec{x}'(t)\times\vec{x}''(t)\right|^2}$.

Sustav tih triju jednadžbi $s=s(t)$, $\chi=\chi(t)$, $\tau=\tau(t)$ ujedno je prirodna jednadžba prostorne regularne krivulje $\mathcal{C} \ \ldots \ \vec{x}=\vec{x}(t)$ (parametrizirane proizvoljnim parametrom *t*).

Primjer 2.9.4

Kako glase prirodne jednadžbe heliksa zadanog sa:

$$\vec{x}(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + bt \cdot \vec{k} = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}, \ a > 0, \ b > 0.$$

U primjeru 2.5.5 zadani heliks smo reparametrizirali po prirodnom parametru s, čime smo dobili

$$\vec{x}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} s \right).$$

Nadalje, pokazali smo da za bilo koji s vrijednosti fleksije i torzije heliksa su dane sa:

$$\chi(s) = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2},$$

stoga su $\chi(s) = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $\tau(s) = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ prirodne jednadžbe zadanog heliksa.

✐ Postupak prijelaza sa prirodnih jednadžbi regularne prostorne krivulje na vektorsku jednadžbu je malo kompliciraniji, jer je on u direktnoj vezi sa integriranjem Fernet-Serret-ovih formula, čime se dobivaju diferencijalne jednadžbe, poznate pod nazivom Riccatijeve diferencijalne jednadžbe (koje nećemo rješavati u ovom kolegiju).

No, taj se postupak znatno pojednostavljuje u situaciji kada se radi o ravninskim krivuljama.

Podsjetimo se da za bilo koju ravninsku krivulju vrijedi da je torzija u svakoj njenoj točki jednaka nuli (teorem 2.6.4), stoga specijalno za ravninske krivulje iz osnovnog teorema teorija krivulja proizlazi sljedeći korolar.

Korolar 2.9.5

Neka je $\chi = \chi(s)$ proizvoljna neprekidna funkcija definirana za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$.

Tada u ravnini postoji jedinstvena regularna krivulja $\mathcal{C}$, kojoj je $\chi(s)$ fleksija, a s je prirodan parametar, tj duljina luka te krivulja $\mathcal{C}$.

Pritom je $\chi = \chi(s)$ prirodna jednadžba ravninske regularne krivulje.

Komentar 2.9.6

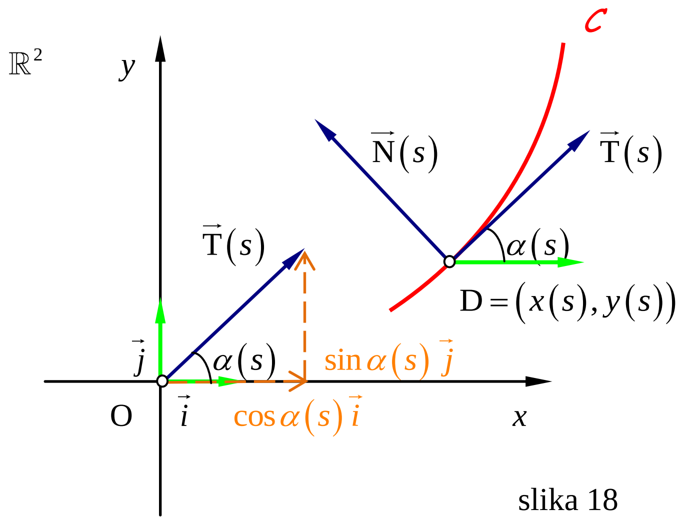
Prirodna jednadžba regularne ravninske krivulje računa se analogno kao prirodne jednadžbe prostorne krivulje (vidi komentar 2.9.3) time da se izostavlja torzija, jer torzija u svakoj točki bilo koje ravninske krivulje iščezava (teorem 2.6.4).

✎ **Postupak prijelaza iz prirodne jednadžbe na vektorsku jednadžbu ravninske krivulje $\mathcal{C}$**

Neka je regularna ravninska krivulja $\mathcal{C}$ zadana svojom prirodnom jednadžbom: $\chi = \chi(s)$.

U nastavku želimo odrediti njezinu vektorsku jednadžbu: $\vec{x}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j}$, $s \geq 0$.

Time se nameće potreba izračunavanja vrijednosti skalarnih funkcija $x(s)$ i $y(s)$ (tj. komponenti vektorske funkcije $\vec{x} = \vec{x}(s)$) u ovisnosti o fleksiji $\chi = \chi(s)$, koja je zadana kao skalarna funkcija po prirodnom parametru s ravninske regularne krivulje $\mathcal{C}$.



slika 18

Primijetimo, u svakoj točki (diralištu) $\mathrm{D} = (x(s), y(s))$ regularne ravninske krivulje $\mathcal{C}$, kojoj je $\vec{x}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j}$ vektorska jednadžba, možemo njezin pripadni jedinični vektor tangente $\vec{\mathrm{T}}(s) = \vec{x}\,'(s)$ zapisati u obliku: $\boxed{\vec{\mathrm{T}}(s) = \cos\alpha(s)\,\vec{i} + \sin\alpha(s)\,\vec{j}}$.

- Uzimajući u obzir da je jedinični vektor normale $\vec{\mathrm{N}}(s)$ ortogonalan na $\vec{\mathrm{T}}(s)$ te koristeći svojstva trigonometrijskih funkcija: $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

  dobivamo:

$$\boxed{\vec{\mathrm{N}}(s) = -\sin\alpha(s)\,\vec{i} + \cos\alpha(s)\,\vec{j}}\,.$$

Deriviranjem jediničnih vektora tangente i normale dobivamo:

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{T}}\,'(s) &= (-\sin\alpha(s))\cdot\alpha'(s)\,\vec{i} + (\cos\alpha(s))\cdot\alpha'(s)\,\vec{j} \\ &= \alpha'(s)\cdot(-\sin\alpha(s)\,\vec{i} + \cos\alpha(s)\,\vec{j}) \\ &= \alpha'(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s) \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{N}}'(s) &= \left(-\cos\alpha(s)\right)\cdot\alpha'(s)\,\vec{i} + \left(-\sin\alpha(s)\right)\cdot\alpha'(s)\,\vec{j}\\ &= -\alpha'(s)\cdot\left(\cos\alpha(s)\,\vec{i}+\sin\alpha(s)\,\vec{j}\right)\\ &= -\alpha'(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s)\end{aligned}$$

te uzimajući u obzir Frenet-Serret-ove formule za ravninske krivulje $\mathcal{C}$

$$\vec{\mathrm{T}}'(s)=\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s), \qquad \vec{\mathrm{N}}'(s)=-\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s),$$

zaključujemo da je:

$$\alpha'(s)=\chi(s),$$

odakle proizlazi:

$$\boxed{\alpha(s)=\int_{s_0}^{s}\chi(u)\,\mathrm{d}u}\,. \tag{87}$$

Primjenom formule (87) dobiva se vrijednost skalarne funkcije $\alpha(s)$ u ovisnosti o prirodnom parametru s krivulje $\mathcal{C}$.

Nadalje, uzimajući u obzir da je $\vec{x}'(s)=\vec{\mathrm{T}}(s)$ i $\vec{\mathrm{T}}(s)=\cos\alpha(s)\,\vec{i}+\sin\alpha(s)\,\vec{j}$ dobivamo:

$$\vec{x}(s)=\int_{s_0}^{s}\vec{\mathrm{T}}(u)\,\mathrm{d}u$$

odnosno:

$$\boxed{\vec{x}(s)=\vec{i}\cdot\int_{s_0}^{s}\cos\alpha(u)\,\mathrm{d}u+\vec{j}\cdot\int_{s_0}^{s}\sin\alpha(u)\,\mathrm{d}u}\,. \tag{88}$$

Jednadžba (88) je tražena vektorska jednadžba regularne ravninske krivulje $\mathcal{C}$ s obzirom na njenu zadanu prirodnu jednadžbu.

Lako se vidi da vrijednosti skalarnih funkcija $x(s)$ i $y(s)$, tj. komponenti vektorske funkcije $\vec{x}=\vec{x}(s)$ dobivamo rješavanjem pripadnih integrala, gdje je

$$x(s)=\int_{s_0}^{s}\cos\alpha(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

$$y(s)=\int_{s_0}^{s}\sin\alpha(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Primjer 2.9.7

Napišite vektorsku jednadžbu krivulje, kojoj je prirodna jednadžba

$$s^2\cdot\chi^2(s)+1=16a^2\cdot\chi^2(s), \qquad a=konst.$$

Rj.

Napišimo najprije prirodnu jednadžbu u eksplicitnom obliku: $\boxed{\chi(s)=\dfrac{1}{\sqrt{16a^2-s^2}}}$.

Treba napisati vektorsku jednadžbu $\mathcal{C}\ \ldots\ \vec{x}(s)=x(s)\,\vec{i}+y(s)\,\vec{j}$ zadane krivulje.

Pritom je: $x(s)=\int\limits_{s_0}^{s}\cos\alpha(u)\,\mathrm{d}u$, $y(s)=\int\limits_{s_0}^{s}\sin\alpha(u)\,\mathrm{d}u$,

pri čemu je:

$$\underline{\alpha(s)=\int\limits_{s_0}^{s}\chi(u)\,\mathrm{d}u\,.}$$

Dobivamo

$$\alpha(s)=\int\limits_{s_0}^{s}\frac{1}{\sqrt{16a^2-u^2}}\,\mathrm{d}u=\arcsin\frac{u}{4a}\Big|_{s_0=0}^{s}=\arcsin\frac{s}{4a}-\underbrace{\arcsin 0}_{=0}$$

odnosno:

$$\underline{\alpha(s)=\arcsin\frac{s}{4a}}\,,$$

odakle je $\sin\alpha(s)=\dfrac{s}{4a}$,

odnosno $\cos\alpha(s)=\sqrt{1-\sin^2\alpha(s)}=\sqrt{1-\dfrac{s^2}{16a^2}}=\dfrac{\sqrt{16a^2-s^2}}{4a}$.

Time je:

$$x(s)=\int\limits_{s_0=0}^{s}\cos\alpha(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4a}\cdot\int\limits_{0}^{s}\sqrt{16a^2-u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(u\cdot\sqrt{16a^2-u^2}+16a^2\cdot\arcsin\frac{u}{4a}\right)\Big|_{0}^{s}$$

$$=\frac{1}{8a}\cdot\left(s\cdot\sqrt{16a^2-s^2}+16a^2\cdot\arcsin\frac{s}{4a}\right)$$

$$y(s)=\int\limits_{s_0=0}^{s}\sin\alpha(u)\,\mathrm{d}u=\int\limits_{0}^{s}\frac{u}{4a}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4a}\cdot\frac{u^2}{2}\Big|_{0}^{s}=\frac{1}{8a}\cdot s^2\,,$$

stoga dobivamo da je tražena vektorska jednadžba regularne ravninske krivulje dana sa

$$\mathcal{C}\ \ldots\ \vec{x}(s)\ =\ \frac{1}{8a}\cdot\left(s\cdot\sqrt{16a^2-s^2}+16a^2\cdot\arcsin\frac{s}{4a}\right)\vec{i}\ +\ \frac{s^2}{8a}\,\vec{j}\,,\qquad s\geq 0\,.$$